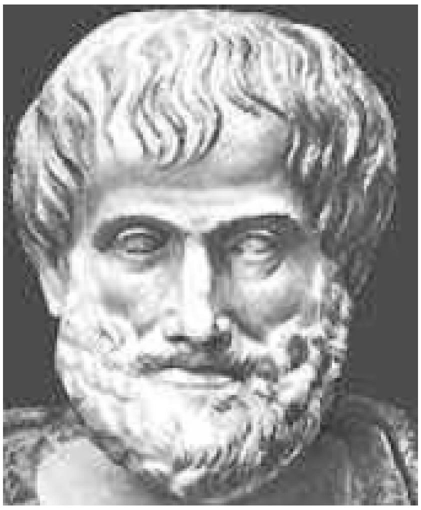
Skrypt z matematyki

Kinga Kolczyńska - Przybycień

Elementy Logiki

Logika jest to nauka zajmująca się zagadnieniami prawdy i fałszu. Podstawowym pojęciem tej nauki jest *pojęcie zdania w sensie logiki* .
Za ojca logiki można uznać greckiego uczonego Arystotelesa.

Arystoteles *urodził się w Stagirze, na Półwyspie Trackim w roku 384, zmarł w roku 322 p.n. e. w Chalkis. W roku 367 przybył do Aten i wstąpił do platońskiej Akademii (szkoły).*
W Akademii spędził dwadzieścia lat, z początku jako uczeń i zwolennik plutonizmu, następnie jako samodzielny, oryginalny myśliciel. Po opuszczeniu Aten i trzyletnim pobycie w Assos (w Azji) oraz, w pobliskim Atarneusie, gdzie nauczał i prowadził badania, był nauczycielem Aleksandra Macedońskiego aż do jego wstąpienia na tron; następnie pozostał w Macedonii i mieszkał w Stagirze. Po ustaniu bliskich stosunków z Aleksandrem powrócił do Aten i założył tam szkołę „perypatetycką”, którą prowadził od roku 335 do 323. Następnie udał się do Chalkis, gdzie zmarł niebawem.



Rysunek 1: Arystoteles

Zdaniem w sensie logiki nazywamy każde zdanie o którym możemy stwierdzić, czy jest prawdziwe czy też nieprawdziwe.
Przykłady **zdań w sensie logiki :**
Stół jest krzesłem.
W sierpniu jest lato.
Przykłady zdań, które **nie są zdaniami w sensie logiki :**
Czy jutro będzie padało?
Podejdź do tablicy!
Zdaniami w sensie logiki nie są ani zdania w trybie pytającym, ani w trybie rozkazującym.

Zadanie 1
W poniższym tekście wskaż zdania, które są zdaniami w sensie logiki.
“Polya mawiał:

- von Neumann był jedynym moim uczniem, którego się bałem. Prowadziłem w Zurichu seminarium, którego uczestnikiem był von Neumann. Doszedłszy do pewnego twierdzenia powiedziałem, że nie jest udowodnione i dowód pewnie byłby trudny. Von Neumann nie odezwał się, ale po pięciu minutach podniósł rękę. Gdy go wywołałem, podszedł do tablicy i to twierdzenie......... udowodnił. Odtąd lękałem się go jak ognia."

Ze zdań logicznych za pomocą pewnych operacji logicznych możemy tworzyć nowe zdania logiczne.
Taki operatorami są tzw. **spójniki logiczne.** Wyróżniamy pięć podstawowych spójników logicznych:
koniunkcja "i" ozn. $\wedge$
alternatywa "lub" ozn. $\vee$
implikacja "jeżeli ..., to ..." ozn. $\Longrightarrow$
równoważność "..., wtedy i tylko wtedy, gdy..." ozn. $\Longleftrightarrow$
negacja "nieprawda, że ..." ozn. $\neg$

Ćwiczenie 1
Niech p będzie zdaniem: Polska leży w Europie.
Niech q będzie zdaniem: Europa jest kontynentem o największej powierzchni.
Zapisz słownie zdania: $p \wedge q$, $q \vee p$, $p \Longrightarrow q$, $p \Longleftrightarrow q$, $\neg p$, $\neg q$ i oceń ich prawdziwość.

W celu skrócenia zapisu w dalszym ciągu wartości logiczne tj. prawdę i fałsz będziemy oznaczali odpowiednio symbolami $1, 0$.
Poniższa tabela przedstawia wartości logiczne wyżej zdefiniowanych spójników logicznych.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0

Prawa logiczne to formuły (tzn. sensowne wyrażenia) złożone ze spójników logicznych oraz liter o tej własności, że jeżeli za każdą literę podstawimy dowolne zdanie w sensie logiki, to w wyniku takiego podstawienia otrzymamy zdanie prawdziwe.

Wybrane prawa rachunku zdań

- Prawo tautologii

$$p \Longrightarrow p$$

- Prawo podwójnego przeczenia

$$(\neg(\neg p)) \Longleftrightarrow p$$

- Prawo wyłączonego środka

$$(\neg p) \vee p$$

- Prawa de Morgana

$$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$$

Dowód Prawa tautologii :

p	$p \Longrightarrow p$
0	1
1	1

Dowód Prawa podwójnego przeczenia

p	$\neg p$	$(\neg(\neg p))$	$(\neg(\neg p)) \Longleftrightarrow p$
1	0	1	1
0	1	0	1

Dowód Prawa wyłączonego środka

p	$\neg p$	$(\neg p) \vee p$
1	0	1
0	1	1

Dowód Praw de Morgana

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$\neg(p \vee q) \iff (\neg p) \wedge (\neg q)$
1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$\neg(p \wedge q) \iff (\neg p) \vee (\neg q)$
1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1

Przykład 1
Sprawdź, czy poniższa formuła jest tautologią :

$$[(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow r] \Longrightarrow [(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)]$$

Rozwiązanie :

p	q	r	$p \Longrightarrow q$	$(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow r$	$p \Longrightarrow r$	$(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$	formuła
0	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1

Odpowiedź:
Powyższa formuła jest tautologią.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1
Sprawdź, czy poniższe formuły są tautologiami:

(a)
$$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)] \Longrightarrow p$$

(b)
$$(\neg p \Longrightarrow p) \Longrightarrow q$$

(c)
$$[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$$

Zadanie 2
Udowodnij następujące prawa:

- *Prawo przemienności koniunkcji:*
$$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$$
- *Prawo przemienności alternatywy:*
$$(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$$
- *Prawo łączności alternatywy:*
$$[(p \vee q) \vee s] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee s)]$$
- *Prawo łączności koniunkcji:*
$$[(p \wedge q) \wedge s] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge s)]$$
- *Prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy:*
$$[p \wedge (q \vee s)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge s)]$$

- *Prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji*

$$[p \vee (q \wedge s)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee s)]$$

- *Reguła odrywania*

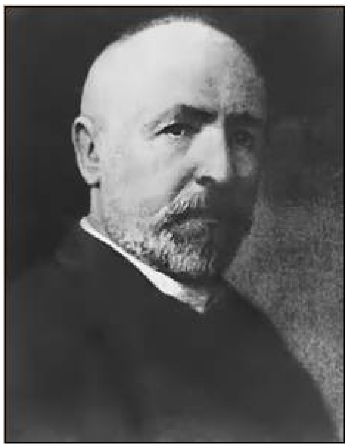
$$[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$$

Zadanie 3
Zdefiniuj implikację za pomocą negacji i alternatywy.

Elementy Teorii Mnogości

Pojęcie zbioru
Dawniej używano nazwy mnogość, którą wprowadził twórca tej teorii, niemiecki matematyk Georg Cantor.

Cantor Georg Ferdinand Ludwig Philip *(ur. 3 marca 1845 r. w Sankt Petersburgu - zm. 6 czerwca 1918 r. w sanatorium w Halle) - niemiecki matematyk. Studiował w Darmstadt, Zürichu i Getyndze.Do jego nauczycieli należeli: Karol Weierstraß, Ernst Edward Kummer oraz Leopold Kronecker. Później pracował w Halle. Był zaprzyjaźniony z Ryszardem Dedekindem. Cantor miał znaczący udział w tworzeniu podwalin nowoczesnej matematyki. W szczególności uchodzi za twórcę teorii mnogości. Cantorowi zawdzięczamy następującą definicję zbioru: Zbiorem jest spojenie w całość określonych rozróżnialnych podmiotów naszej poglądowości czy myśli, które nazywamy elementami danego zbiory."*



Rysunek 2: G. Cantor

Jego największym wkładem w rozwój matematyki było stworzenie podwalin teorii mnogości a w tym koncepcji liczb pozaskończonych. Cantor odkrył, że zbiory nieskończone mogą być różnej wielkości - w szczególności pokazał za pomocą rozumowania przekątniowego, że zbiór liczb naturalnych nie jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych. Cantor przez długi czas starał się udowodnić hipotezę continuum (jak się okazało w latach 50. - jego wysiłki nie mogły *przynieść zadowalającego go rezultatu). Długie lata cierpiał na ciężkie depresje (parokrotnie był z tego powodu hospitalizowany). Pod koniec życia zajmował się również mistycyzmem - rozwijał koncepcję Absolutnej Nieskończoności, którą utożsamiał z Bogiem. Większość współczesnych mu matematyków odnosiło się do jego dokonań z dużą nieufnością. Obecnie niemal wszyscy matematycy nie tylko w pełni akceptują jego wyniki, ale i uznają je za przełomowe w historii matematyki.*

Zbiór jest w teorii mnogości **pojęciem pierwotnym**, czyli takim, którego nie definiujemy. Możemy jedynie tworzyć tzw. intuicyjną definicję tego pojęcia.
Przez **zbiór** rozumiemy "kolekcję " jakiś przedmiotów.
Na przykład zbiór może być złożony z : krzesła, książki i psa.
Zbiory oznaczamy dużymi literami alfabetu, natomist jego elementy małymi literami alfabetu.
Jeżeli A jest zbiorem, zaś a jego elementem, to piszemy $a \in A$ i czytamy [a należy do A].
Jeśli natomiast A jest zbiorem, zaś a nie jest jego elementem to piszemy $a \notin A$ i czytamy [a nie należy do A].
O dwóch zbiorach A i B mówimy, że są **równe**, wtedy i tylko wtedy, gdy są złożone z tych samych elementów, tzn. dla dowolnego x prawdziwe jest zdanie:

$$x \in A \Longleftrightarrow x \in B.$$

Równość zbiorów oznaczamy $A = B$ i czytamy [A równe B].

Mówimy, że zbiór A jest **zawarty** w zbiorze B (**inkluzja**), lub, że A jest **podzbiorem** zbioru B , jeżeli każdy element zbioru A należy do zbioru B, co oznaczamy $A \subset B$ i czytamy [A zawiera się w B].
Można więc teraz krótko napisać:

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Zbiorem pustym nazywamy zbiór, który nie ma żadnych elementów i oznaczamy symbolicznie $\emptyset$. Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.

Ćwiczenie 1
Wypisz elementy podanego zbioru:
$A = \{x \in C : x \cdot x = 9\}$.
Odpowiedź:
$A = \{-3, 3\}$.

Przykład 1
Niech A_n będzie zbiorem wszystkich wielokrotności liczby naturalnej n. Czy istnieje liczba x która należy do nieskończenie wielu zbiorów A_n?
Rozwiązanie:
W zależności od definicji. Jeśli wielokrotność liczby a zdefiniujemy jako zbiór wszystkich liczb postaci $k \cdot a$, gdzie $k \in C$, to wówczas taka liczba istnieje i nietrudno odgadnąć, że jest nią zero.
Jeśli ntomiast wielokrotność liczby a zdefiniujemy jako zbiór wszystkich liczb postaci $k \cdot a$, gdzie $k \in N$, to wówczas taka liczba nie istnieje, gdyż każda liczba naturalna ma tylko skończoną liczbę dzielników.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1
Wypisz elementy podanych zbiorów:

(a)
$$B = \{x \in N : x \cdot x = 9\}.$$

(b)
$$C = \{x \in N : x \cdot x = -3\}.$$

Zadanie 2
Czy prawdziwe jest zdanie: $1 \in A$. jeżeli, $A = \{x : 2x = 3\}$.

Zadanie 3
Czy prawdą jest, że $A \subset B$, jeżeli :

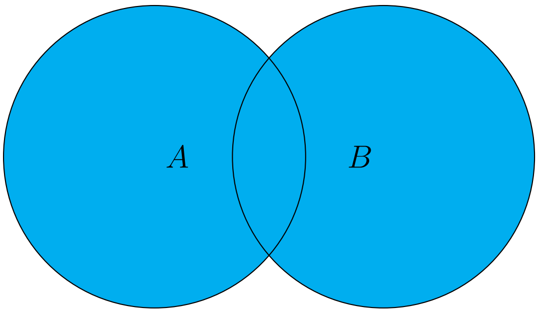
- $A = \{1, 3, 5, 9, 14, 20\}$ a $B = \{-3, 1, 3, 5, 9\}$,
- A- zbiór uczniów klasy 1b, zaś B- zbiór uczniów całej szkoły,
- A-zbiór pusty i B- zbiór pusty,
- $A = \{x \in N\}$, zaś $B = \{x \in C\}$.

Zadanie 4
Dany jest zbiór $A = \{1, 2, 3, \}$.
Wyznacz zbiór wszystkich jego podzbiorów. Ile ich jest?

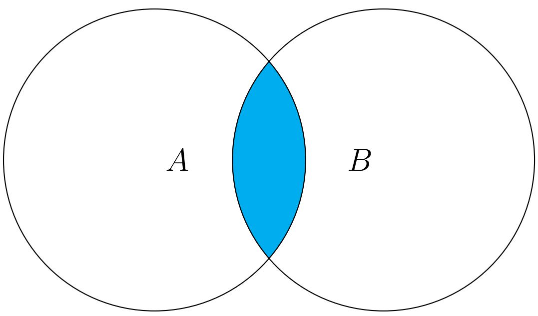
Wykonaj to samo dla zbioru $B = \{1, 2, 3, 4, \}$.
Co zauważyłeś?
Obserwacja
Jeśli udało Ci się zobserwować, że zbiór n-elementowy ma dokładnie 2^n wszystkich podzbiorów, to postaraj się to uzasadnić.

Działania na zbiorach

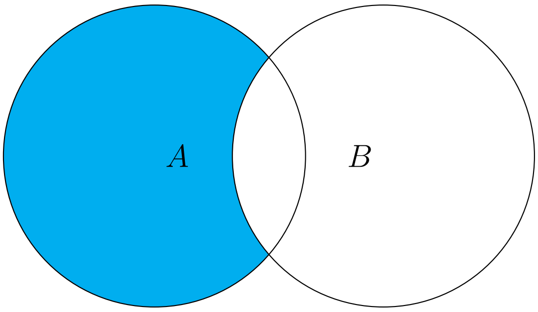
Mając dane dwa zbiory: A i B możemy za pomocą pewnych operacji utworzyć z nich nowe zbiory.
Suma zbiorów (Suma mnogościowa)
Sumą zbiorów A **i** B nazywamy zbiór złożony z tych elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B. Oznaczamy ją symbolicznie $A \cup B$.
Piszemy:
$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$.



Iloczyn (przekrój) zbiorów (Iloczyn mnogościowy)
Iloczynem zbiorów A **i** B nazywamy zbiór złożony z tych elementów, które należą do zbioru A i należą do zbioru B. Oznaczamy go symbolicznie $A \cap B$.
Czyli:
$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$.



Różnica zbiorów(Różnica mnogościowa)
Różnicą A **minus** B nazywamy zbiór złożony z tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B. Oznaczamy ją $A \setminus B$.
Czyli: $x \in A \setminus B \Longleftrightarrow x \in A \land x \notin B$.



Przykład 1
Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeżeli :
A- zbiór dzielników liczby 16, zaś $B = \{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie :
Zbiór A to zbiór wszystkich dzielników liczby 16, zatem :

$$A = \{-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16\},$$

natomiast

$$B = \{1, 2, 3\}.$$

Więc :

- $A \cup B = \{-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 8, 16\}$,
- $A \cap B = \{1, 2\}$,
- $A \setminus B = \{-16, -8, -4, -2, -1, 4, 8, 16\}$,
- $B \setminus A = \{3\}$,

Zadanie 1
Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeżeli :
A- zbiór kwiatów, B- zbiór róż.

Zadanie 2
Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeżeli :
$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$.

Zadanie 3
Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeżeli :
$A = \{x : x^2 = 16\}$, $B = \{x : x + 1 = 2\}$.

Zadanie 4
Niech $A = \{x :$ istnieją $a, b \in N$ takie, że $a > 1, b > 1$ oraz $x = a \cdot b\}$, opisz słownie czym są elementy zbioru $N \setminus (A \cup \{1\})$?

Zadanie 5
Niech $A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Sprawdź, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące własności:

(a)
$$A \dot{-} B = \emptyset \iff A = B$$

(b)
$$A \dot{-} B = B \dot{-} A$$

(c)
$$A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$$

(d)
$$(A \dot{-} B) \cup (B \dot{-} C) \supset A \dot{-} C$$

Operację $A \dot{-} B$ nazywamy *różnicą symetryczną zbiorów* a i b. Może domyślasz się dlaczego tę różnicę nazywamy różnicą symetryczną? Jeśli tak, spróbuj to wyjaśnić.

Moc zbiorów

Jeżeli zbiór A ma skończenie wiele elemntów, to ilość elementów zbioru A oznaczamy przez $\overline{\overline{A}}$ i nazywamy **mocą zbioru** A.
Dla zbiorów skończonych A, B, C prawdziwe są następujące własności:

(a) $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A \cap B}}$

(b) $\overline{\overline{A \cup B \cup C}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}} - \overline{\overline{A \cap B}} - \overline{\overline{A \cap C}} - \overline{\overline{B \cap C}} + \overline{\overline{A \cap B \cap C}}$

(c) Jeżeli $A \subset B$, to $\overline{\overline{B \setminus A}} = \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A}}$

(d) $\overline{\overline{B \setminus A}} = \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{B \cap A}}$

Przykład 1
W klasie jest 20 uczniów,przy czym każdy uczy się co najmniej jednego języka. Języka łacińskiego uczy się 10 osób, języka greckiego natomiast 15 osób. Ile osób uczy się łaciny i greki?

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez A zbiór osób uczących się łaciny,przez B natomiast zbiór osób uczących się greki.
Wiemy , że:

$$\overline{\overline{A \cup B}} = 20, \qquad \overline{\overline{A}} = 10, \qquad \overline{\overline{B}} = 15$$

Szukamy: $\overline{\overline{A \cap B}}$.
Ponieważ

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A \cap B}}.$$

więc

$$\overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A \cup B}}.$$

Zatem

$$\overline{\overline{A \cap B}} = 10 + 15 - 20 = 5.$$

Odpowiedź.
Łaciny i greki uczy się pięć osób.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1
W klasie każdy uczy się co najmniej jednego języka. 17 osób uczy się języka angielskiego, 14 języka niemieckiego a 5 osób uczy się angielskiego i niemieckiego. Ilu uczniów liczy ta klasa?

Zadanie 2
W klasie jest 30 uczniów i każdy uczy się co najmniej jednego języka. 20 osób uczy się języka angielskiego, 15 języka niemieckiego a 10 osób języka francuskiego. 5 z nich uczy się języka angielskiego i języka niemieckiego, 5 języka angielskiego i języka francuskiego oraz 5 języka francuskiego i języka niemieckiego. Ilu uczniów uczy się wszystkich trzech języków?

Zadanie 3
W klasie jest 24 uczniów i każdy uczy się co najmniej dwóch języków. Przy czym: języka angielskiego uczy się 16 osób, języka niemieckiego 17 osób, języka hiszpańskiego natomiast 18 uczniów. Ilu uczniów uczy się wszystkich

trzech języków?

Zadanie 4
Każda spośród 154 osób pracujących w pewnej firmie drogę do pracy pokonuje korzystając z tramwaju, autobusu lub metra. Z tramwaju korzysta 80 osób, z autobusu 110, a z metra 60 osób. Wśród nich są osoby korzystające z wszystkich trzech środków lokomocji i nie ma osób, które korzystają tylko z dwóch środków lokomocji. Ile osób korzysta z trzech środków lokomocji?

Zadanie 5
Dane są dowolne zbiory A i B uzasadnij, że

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} \geqslant \overline{\overline{A \cup B}}.$$

Zadanie 6
Uogólnij tezę poprzedniego zadania w następujący sposób. Dla dowolnych zbiorów $A_1, A_2, ..., A_n$ zachodzi nierówność:

$$\overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}} + ... + \overline{\overline{A_n}} \geqslant \overline{\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n}}.$$

Zadanie 7
Czy dla niepustych zbiorów A, B może zajść równość $\overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}}$? Jeśli tak, to dla jakich?

Arytmetyka liczb całkowitych

Przez N oznaczać będziemy zbiór liczb naturalnych, natomiast przez C zbiór liczb całkowitych. Zatem

$$N = \{1, 2, 3, ...\},$$

$$C = \{0, -1, 1, -2, 2, ...\}.$$

Podzielność w zbiorze liczb całkowitych

Mówimy, że liczba całkowita a **dzieli liczbę całkowitą** b, jeżeli istnieje liczba całkowita c, taka, że: $b = a \cdot c$. Oznaczamy to $a \mid b$. Wówczas liczbę a nazywamy **dzielnikiem liczby** b.
Dalej podamy podstawowe własności relacji podzielności.

Dla dowolnych liczb całkowitych prawdziwe są poniższe własności:

1. $a \mid b \wedge b \mid c \Longrightarrow a \mid c$

2. $a \mid a$

3. $a \mid b \wedge a \mid c \Longrightarrow a \mid b + c$

4. $a \mid b \wedge a \mid c \Longrightarrow a \mid b - c$

Wśród liczb naturalnych wyróżniamy **liczby pierwsze** i **liczby złożone**. Zbiór liczb pierwszych będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{P}$.
Definicja 1
Liczbę naturalną, różną od jeden nazywamy **liczbą pierwszą**, jeżeli ma dokładnie dwa dzielniki naturalne.
Na przykład, zbiorem dzielników naturalnych liczby 5 jest zbiór $D = \{1, 5\}$.

Definicja 2
Liczbę naturalną, różną od jeden, która nie jest liczbą pierwszą nazywamy **liczbą złożoną**.
Na przykład, zbiorem dzielników naturalnych liczby 6 jest zbiór $D = \{1, 2, 3, 6\}$.

Uwaga!
Liczba "1" nie jest ani liczbą pierwszą, ani liczbą złożoną.

Ćwiczenie 1
Udowodnij, że jeśli liczba naturalna a jest liczbą złożoną, to ma ona dzielnik pierwszy, mniejszy lub równy od $\sqrt{a}$.

Ćwiczenie 2
Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c prawdziwe są następujące zdania:

(a) $a|a$,

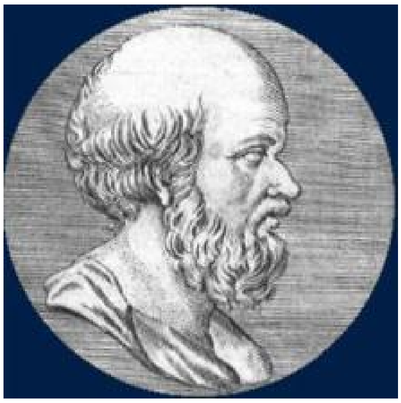
(b) $(a|b \wedge b|a) \Longrightarrow (a = b \vee a = -b)$,

(c) $(a|b \wedge b|c) \Longrightarrow (a|c)$.

Sito Eratostenesa

Już starożytni Grecy zastanawiali się nad zagadnieniem liczb pierwszych. Do rozwoju teorii przyczynił się zdecydowanie **Eratostenes z Cyreny**- wymyślił tzw. **Sito Eratostenesa** czyli dość prosty (dla małych liczb) algorytm znajdowania liczb pierwszych.

Eratostenes z Cyreny, *ur. ok. 275 p.n.e., Cyrena (Libia), zm. ok. 194 p.n.e., Aleksandria, grecki filozof, astronom, matematyk i geograf. Zajmował się także filologią, historią i muzyką; naczelny kustosz Biblioteki Aleksandryjskiej i wychowawca późniejszego faraona Ptolemeusza IV Filopatora; uważany za najbardziej uczonego człowieka swych czasów. Do jego największych osiągnięć należy wykonanie pierwszego, stosunkowo dokładnego pomiaru wielkości kuli ziemskiej. Wykorzystał przy tym fakt, że gdy w Syene (ob. Asuan) w południe Słońce znajduje się dokładnie w zenicie, w Aleksandrii, leżącej w przybliżeniu na tym samym południku, odległość Słońca od zenitu wynosi 1/50 kąta pełnego (czyli* $7^o12'$*). Wywnioskował stąd, że kąt środkowy, odpowiadający łukowi południka między tymi miejscowościami, jest także równy 1/50 kąta pełnego, a więc obwód południka wynosi 50 odległości z Syene do Aleksandrii. Odległość tę przyjął E. jako 5000 stadionów, co dało obwód kuli ziemskiej 250 000 stadionów. Przeliczenie stadionów na metry jest niepewne; jeśli np. przyjmuje się za J.L. Dreyerem, że 1 stadion = 157,5 m, to promień i obwód Ziemi oceniane przez E. są tylko o nieco ponad 1% mniejsze od obecnie znanych; podane przez E. wartości są najwidoczniej zaokrąglone, więc ich dokładne przeliczanie na współczesne miary jest mało uzasadnione. E. wyznaczył też kąt nachylenia ekliptyki do równika niebieskiego.*



Rysunek 3: Erastotenes

Aktualnie problem zdaje się wciąż nie być dostatecznie zbadany. Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele i do tej pory nie znamy żadnego praktycznego wzoru na znajdowanie kolejnych liczb pierwszych.
Sito Eratostenesa to algorytm służący do wyznaczania liczb pierwszych z zadanego przedziału.
Działanie sita Eratostenesa omówimy na następującym przykładzie:

Przykład 1
Wyznacz wszystkie liczby pierwsze mniejsze od liczby 101.

Rozwiązanie:
Wypisujemy wszystkie liczby naturalne, mniejsze od liczby 101:
1 krok
Wykreślamy 1(bo 1 nie jest ani liczbą pierwszą, ani liczbą złożoną). Ponieważ pierwszą w kolejności liczbą pierwszą jest liczba 2, więc ją zostawiamy, natomiast wykreślamy wszystkie większe od niej jej wielokrotności.
2 **krok**
Ponieważ po wykonaniu pierwszego kroku pierwszą niewykreśloną liczbą większą od 2 jest liczba 3, więc 3 jest liczbą pierwszą, zatem zostawiamy ją, natomiast wykreślamy wszystkie większe od niej wielokrotności liczby 3.
3 **krok**
Ponieważ po wykonaniu drugiego kroku pierwszą niewykreśloną liczbą większą od 3 jest liczba 5, więc 5 jest liczbą pierwszą, zatem zostawiamy ją, natomiast wykreślamy wszystkie większe od niej wielokrotności liczby 5.
4 krok
Ponieważ po wykonaniu trzeciego kroku pierwszą niewykreśloną liczbą większą od 5 jest liczba 7, więc 7 jest liczbą pierwszą, zatem zostawiamy ją, natomiast wykreślamy wszystkie większe od niej wielokrotności liczby 7.
Ponieważ, jak wynika to z Ćwiczenia 1, każda liczba złożona mniejsza od 101 musi mieć dzielnik pierwszy mniejszy lub równy od $\sqrt{100} = 10$, a jedynymi liczbami pierwszymi mniejszymi lub równymi od liczby 10 są liczby: $2, 3, 5, 7$, więc wszystkie niewykreślone po 4 kroku liczby z poniższej tabeli są liczbami pierwszymi.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Zadanie 1
Podaj przykład sześciu liczb pierwszych $p_1, p_2, ..., p_6$ takich, że

$$p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = p_4 - p_3 = p_5 - p_4 = p_6 - p_5$$

Zadanie 2
Udowodnij, że jeżeli $p \in \mathcal{P},\ \ p > 5$, to, istnieje liczba naturalna m taka, że $p = 6m + 1$ lub istnieje liczba naturalna n taka, że $p = 6n + 5$.

Zadanie 3
Udowodnij, że jeżeli $p \in \mathcal{P}$ oraz $p = a^2 + b^2$ dla pewnych $a, b \in N$, to istnieje $k \in C$ o tej własności, że $p = 4k + 1$.

Zasadnicze twierdzenie arytmetyki

Twierdzenie 1 (*Zasadnicze Twierdzenie Arytmetyki*)
Jeżeli p jest liczbą pierwszą, natomiast a i b są liczbami całkowitymi, oraz $p \mid a \cdot b$, to $p \mid a$ lub $p \mid b$.

Symbolicznie twierdzenie powyższe możemy zapisać następująco:

$$(p \in \mathcal{P} \wedge a, b \in C \wedge p \mid a \cdot b) \Longrightarrow (\ p \mid a \vee p \mid b\ )$$

.
Uwaga!
Twierdzenie 1 nie jest prawdziwe, gdy p nie jest liczbą piwrwszą.
Na przykład:

$$4 \mid 6 \cdot 6 \text{ ale } 4 \nmid 6.$$

Twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na iloczyn liczb pierwszych

Twierdzenie 1 (*Twierdzenie o rozkładzie na iloczyn liczb pierwszych*) *Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby pierwsze różne między sobą $p_1 < p_2 < ... < p_k$ oraz liczby naturalne $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ takie, że*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k},$$

przy czym, rozkład ten jest jednoznaczny.

Przykład
Rozłóż liczbę 20 na iloczyn liczb pierwszych.

Rozwiązanie:
Mamy
$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5.$$

Zadanie 1
Rozłóż na iloczyn liczb pierwszych następujące liczby: $33, 100, 1523$.

Zadanie 2
Wyzacz ilość wszystkich dzielników naturalnych liczb: $1024, 3333, 2676$.

Zadanie 3
Dana jest liczba naturalna
$$n = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{c_s}.$$
Ile wszystkich dzielników naturalnych ma liczba n?

Algorytm wyznaczania NWD i NWW liczb całkowitych

Przez NWD oznaczać będziemy *największy wspólny dzielnik liczb całkowitych*, natomiast przez NWW *najmniejszą wspólną wielokrotność liczb całkowitych.*
Definicja
Liczbę naturalną d nazywamy NWD liczb całkowitych a i b, jeżeli dla dowolnej liczby całkowitej x prawdziwa jest implikacja:
$$(\ x \mid a \wedge x \mid b\ ) \Longrightarrow x \mid d$$
.
Definicja
Liczbę naturalną w nazywamy NWW liczb całkowitych a i b, jeżeli dla dowolnej liczby całkowitej x prawdziwa jest implikacja:
$$(\ a \mid x \wedge b \mid x\ ) \Longrightarrow w \mid x$$
.

Przykład 1
Znajdź $\mathrm{NWD}(32, 112)$

Rozwiązanie
Znajdujemy rozkład liczb 32 oraz 112 na czynniki pierwsze tak, jak to przedstawiono poniżej:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Z powyższego odczytujemy, że

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \cdot 7^0$$

oraz

$$112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^4 \cdot 7^1.$$

Ponieważ $\min\{5, 4\} = 4$ oraz $\min\{0, 1\} = 0$, więc

$$\mathrm{NWD}(32, 112) = 2^4 \cdot 7^0 = 2^4 = 16$$

Przykład 2
Znajdź $\mathrm{NWW}(32, 112)$

Rozwiązanie
Znajdujemy rozkład liczb 32 oraz 112 na czynniki pierwsze tak, jak to przedstawiono poniżej:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Z powyższego odczytujemy, że

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \cdot 7^0$$

oraz

$$112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^4 \cdot 7^1.$$

Ponieważ $\max\{5, 4\} = 5$ oraz $\max\{0, 1\} = 1$, więc

$$\mathrm{NWW}(32, 112) = 2^5 \cdot 7^1 = 224$$

Twierdzenie 1
Dla liczb całkowitych a, b, c różnych od 0 zachodzą następujące wzory:

1. $\mathrm{NWD}(a, -b) = \mathrm{NWD}(a, b)$

2. $\mathrm{NWD}(a, b + a) = \mathrm{NWD}(a, b)$

3. $\mathrm{NWD}(a, b - a) = \mathrm{NWD}(a, b)$

4. $\mathrm{NWD}(a \cdot b, a \cdot c) = a \cdot \mathrm{NWD}(b, c)$

5. $\mathrm{NWD}(a, b, c) = \mathrm{NWD}(\mathrm{NWD}(a, b), c)$

6. $\mathrm{NWW}(a, b, c) = \mathrm{NWW}(\mathrm{NWW}(a, b), c)$

7. $\mathrm{NWD}(a, b) \cdot \mathrm{NWW}(a, b) = a \cdot b$

Twierdzenie 2 (*O dzieleniu z resztą*)
Dla dowolnych liczb całkowitych a,b, $b \neq 0$ istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych p, r o tej własności, że:

$$a = p \cdot b + r$$

przy czym $0 \leqslant r < |b|$.

Algorytm Euklidesa

Algorytm Euklidesa to metoda wyznaczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych.
Dla prostoty działanie Algorytmu Euklidesa przedstawimy na poniższym przykładzie:

Euklides z Aleksandrii *(ur. ok. 365 r. p.n.e., zm. ok. 300 r. p.n.e.) – matematyk grecki pochodzący z Aten, przez większość życia działający w Aleksandrii. Autor jednych z pierwszych prac teoretycznych z matematyki. Główne jego dzieło to Elementy (tytuł grecki Stoicheia geometrias). Elementy są pierwszą próbą aksjomatycznego ujęcia geometrii i były podstawowym podręcznikiem geometrii do XIX wieku. Elementy były bardzo poczytne - przetłumaczono je na olbrzymią liczbę języków, zaś liczbą wydań ustępują jedynie Biblii. Euklides usystematyzował ówczesną wiedzę matematyczną w postaci aksjomatycznego wykładu; zachowały się też dzieła z geometrii, optyki (m.in. prawo odbicia światła), astronomii, teorii muzyki. Dostępne jest tłumaczenie pierwszych ośmiu ksiąg z 1817 dokonane przez Józefa Czecha na język polski napisane językiem staropolskim. Teraz trwają prace nad badaniem "Księgi Euklidesa", mającym za cel przetłumaczenie na język polski przekładu angielskiego dokonanego i opublikowanego przez amerykańskiego profesora matematyki Davida Joyce'a. W projekcie tym biorą udział uczniowie szkół.*

Rysunek 4: Euklides

Przykład

Wyznacz $\mathrm{NWD}(33, 121)$.

Rozwiązanie

Ponieważ $121 > 33$, zatem dzielimy z resztą liczbę 121 przez 33

$$121 = 3 \cdot 33 + 22$$

Otrzymujemy w ten sposób resztę równą 22. Następnie liczbę 33 dzielimy przez tę resztę.

$$33 = 1 \cdot 22 + 11$$

I tak postępujemy do momentu uzyskania reszty równej 0.

$$22 = 2 \cdot 11 + 0$$

Wówczas ostatnia niezerowa reszta jest największym wspólnym dzielnikiem danych liczb.
W naszym przypadku jest to liczba 11.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1
Za pomocą Algorytmu Euklidesa wyznacz $\mathrm{NWD}(6720, 3510)$.

Zadanie 2
Znajdź największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność następujących liczb:

(a) 5187 i 329.

(b) 7717 i 787,

(c) 324, 9288 i 549,

(d) 23717 i 22818.

Zadanie 3
Znajdź liczby całkowite x_0, y_0 tak, aby :

$$23717 \cdot x_0 + 22818 \cdot y_0 = 1$$

Zadanie 4
Liczbę 78561 podzielono przez pewną liczbę naturalną a i otrzymano iloraz równy 136 oraz resztę r. Wyznacz a i r.

Zadanie 5
Liczba naturalna, której suma cyfr jest podzielna przez 3 ma dokładnie cztery dzielniki. Ponadto suma dzielników tej liczby wynosi 80. Wyznacz tę liczbę.

Kongruencje

Defincja 1
Mówimy, że liczba całkowita a *przystaje do* liczby całkowitej b *modulo* n, $n \in N$, jeżeli $n \mid a - b$, co zapisujemy

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\ n).$$

Własności przystawania liczb względem danego modułu podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1
Dla liczb całkowitych a, b, c, d i liczby naturalnej n zachodzą następujące własności:

1. Jeżeli $a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$ i $c \equiv d (\mathrm{mod}\ n)$, to $a + c \equiv b + d (\mathrm{mod}\ n)$.
2. Jeżeli $a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$ i $c \equiv d (\mathrm{mod}\ n)$, to $a - c \equiv b - d (\mathrm{mod}\ n)$.
3. Jeżeli $a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$ i $c \equiv d (\mathrm{mod}\ n)$, to $a \cdot c \equiv b \cdot d (\mathrm{mod}\ n)$.
4. $a \equiv a (\mathrm{mod}\ n)$.
5. Jeżeli $a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$, to $b \equiv a (\mathrm{mod}\ n)$.
6. Jeżeli $a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$ i $b \equiv c (\mathrm{mod}\ n)$, to $a \equiv c (\mathrm{mod}\ n)$.
7. Jeżeli $a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$, to $a^k \equiv b^k (\mathrm{mod}\ n)$, $k \in N$.
8. Jeżeli przez $r_n(x)$ oznaczymy resztę z dzielenia liczby x przez liczbę n, to zachodzi następująca równoważność:

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\ n) \Longleftrightarrow r_n(a) = r_n(b)$$

.

Ćwiczenie 1
Sprawdź,czy prawdziwe są poniższe zdania:

$$10 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$$

$$11 \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 4)$$

$$1 \equiv 1(\text{mod } 3)$$

$$2 \equiv 2(\text{mod } 3)$$

Przykład 1
Udowodnij,że dla dowolnego $n \in N$ prawdziwe jest zdanie:

$$3 \mid 10^n - 1$$

Dowód

Ponieważ:

$$10 \equiv 1(\text{mod } 3),$$

zatem :

$$10^n \equiv 1^n(\text{mod } 3)$$

$$10^n \equiv 1(\text{mod } 3),$$

co kończy dowód.

Przykład 2
Udowodnij,że dla dowolnego $n \in N$ prawdziwe jest zdanie:

$$k - 1 \mid k^n - 1$$

Dowód
Ponieważ

$$k \equiv 1(\text{mod } (k-1)),$$

zatem

$$k^n \equiv 1^n(\text{mod } (k-1))$$

$$k^n \equiv 1(\text{mod } (k-1)),$$

co kończy dowód.

Przykład 3
Udowodnij,że dla dowolnego $n \in N$ prawdziwe jest zdanie:

$$24 \mid 11^{2n+1} + 13^{2n+1}$$

Dowód
Ponieważ

$$11 \equiv -13 (\mathrm{mod}\ 24),$$

zatem

$$11^{2n+1} \equiv (-13)^{2n+1} (\mathrm{mod}\ 24),$$

ale

$$(-13)^{2n+1} = -13^{2n+1},$$

bo dla dowolnego $n \in N$ liczba $2n+1$ jest nieparzysta. Stąd

$$11^{2n+1} + 13^{2n+1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 24),$$

co kończy dowód.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1
Udowodnij, że liczba $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 1$ jest liczbą złożoną.

Zadanie 2
Znajdź liczbę pierwszą p, jeśli wiadomo, że liczby $4p^2+1$ i $6p^2+1$ są liczbami pierwszymi.

Zadanie 3
Sprawdź, czy prawdziwe jest poniższe zdanie:

$$5^{1984} \equiv 1983 (\mathrm{mod}\ 25)$$

Zadanie 4
Wykaż, że liczba:

$$2^{5n+1} + 4^{5n+1} - 6$$

jest podzielna przez 31.

Zadanie 5
Jaka jest cyfra jedności liczby 2^{1000} ?

Zadanie 6
Niech p będzie liczbą pierwszą a liczby a i b liczbami całkowitymi, takimi, że $a^2 \equiv b^2 (\mathrm{mod}\ p)$. Wykaż, że wówczas p dzieli $a + b$ lub p dzieli $a - b$.

Zadanie 7
Rozwiąż następujące kongruencje:
a) $x^3 - 2x + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$
b) $x^2 - x + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$

Zadanie 8
O liczbie naturalnej a wiemy, że przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2. Podaj kilka przykładów liczb spełniających warunki zadania.

Cechy podzielności liczb

Dla liczb całkowitych prawdziwe jest następujące twierdzenie, które podaje cechy podzielności:

Twierdzenie 1

(a) Liczba całkowita jest *podzielna przez* 2, jeżeli jej ostatnia cyfra jest parzysta.

(b) Liczba całkowita jest *podzielna przez* 3, jeżeli suma jej cyfr dzieli się przez 3.

(c) Liczba całkowita jest *podzielna przez* 4, jeżeli liczba złożona z dwóch ostatnich cyfr jest liczbą podzielną przez 4.

(d) Liczba całkowita jest *podzielna przez* 5, jeżeli jej ostatnia cyfra to 0 lub 5.

(e) Liczba całkowita jest *podzielna przez* 9, jeżeli suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

Ponieważ z zasadniczego twierdzenia arytmetyki wynika następujący wniosek:

Wniosek z Zasadniczego Twierdzenia Arytmetyki
Jeżeli p i q, to liczby pierwsze różne od siebie, to zachodzi następująca równoważność:

$$(p \cdot q \mid n) \Longleftrightarrow (p \mid n \wedge q \mid n)$$

Więc dla przykładu, korzystając z tego wniosku otrzymamy *cechę podzielności liczby całkowitej przez* 6 otrzymamy w następujący sposób:
Ponieważ $6 = 2 \cdot 3$, oraz liczby 2 i 3 są liczbami pierwszymi, więc

$$(6 \mid n) \Longleftrightarrow (2 \mid n \wedge 3 \mid n).$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1
Czy liczba 123456789 jest liczbą podzielną przez 9? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2
Dobierz x tak, aby liczba $238x765$ była podzielna przez 3, ale nie była podzielna przez 9:

Zadanie 3
Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 15 lub 20?

Zadanie 4
Ile jest liczb mniejszych od liczby 50 i względnie pierwszych z liczbą 50?

Zadanie 5
Ile jest naturalnych liczb 11-cyfrowych, z których każda jest podzielna przez 9 i w jej zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 0 i 5 ?

Zadanie 6
Znajdź wszsytkie dzielniki liczby $200014 - 2014$.

Problem
Niech p i q będą różnymi od siebie liczbami pierwszymi i niech $n = p \cdot q$. Ile

jest liczb mniejszych do n i względnie pierwszych z n?

Zadanie 7
Przyjmijmy, że k oznacza liczbę całkowitą. Udowodnij, że suma czterech kolejnych liczb nieparzystych bezpośrednio następujących po liczbie $2k$ jest podzielna przez 8.

Zadania 8
Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest podzielna przez 3 Wykaż, że ta liczba dwucyfrowa jest podzielna przez 3.

Zadanie 9
Wykaż, że suma trzech kolejnych naturalnych potęg liczby 3 jest podzielna przez 13.

Zadanie 10
Wykaż, że jeśli w liczbie trzycyfrowej środkowa cyfra jest równa sumie skrajnych cyfr, to liczba ta jest podzielna przez 11.

Zadanie 11
Udowodnij, że suma liczby dwucyfrowej i liczby utworzonej z tych samych cyfr, zapisanych w odwrotnej kolejności, jest podzielna przez 11.

Zadanie 12
Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

Równania Diofantyczne

Definicja 1
Równaniem diofantycznym nazywamy równanie, którego rozwiązania szuka się w zbiorze liczb całkowitych.

Nazwa: *"Równanie Diofantyczne"*, wywodzi się od matematyka greckiego Diofantosa.

Według legendy na jego nagrobku widniał napis:
"Tu jest grobowiec, w którym złożono prochy Diofantosa. Przez jedną szóstą jego życia Bóg obdarzył go młodością, przez dalszą, dwunastą część życia jego policzki były pokryte brodą. Po siódmej dalszej części życia doświadczył szczę-

ścia małżeńskiego, w którego piątym roku został ojcem syna. Nieszczęśliwie syn żył tylko połowę lat ojca, który pozostał w smutku przez cztery ostatnie lata swego życia. Przechodniu, oblicz długość jego życia!"

Ćwiczenie 1
Rozwiąż powyższą zagadkę.

Diofantos *(ur. około 200/214 n.e., zm. około 284/298 n.e.) – matematyk grecki żyjący w III wieku n.e. w Aleksandrii. Jest autorem dzieła Arytmetyka, składającego się z 13 ksiąg, z których zachowało się 6 w języku greckim i 4 przetłumaczone na arabski. Poszerza ono zakres sposobów rozwiązania równań do trzeciego stopnia włącznie, względem wiedzy Babilończyków. Dzięki wprowadzeniu symboli i skrótów (np. na działanie odejmowania, symbol równości lub oznaczenie zmiennej) Diofantos może być uznany za autora języka algebraicznego. Diofantos nie znał liczb ujemnych, jednak odróżniał liczby „dodawane" od „odejmowanych" przez stosowanie odpowiednich znaków. Diofantos miał uważać się za pierwszego matematyka, który zastosował znak równania - (=) oraz znak odejmowania (-).*

Rysunek 5: Diofantos

Przykład 1
Rozwiąż poniższe równanie w liczbach całkowitych:

$$y = 1 + \frac{2}{x}$$

Rozwiązanie:
Ponieważ $y \in C$, więc $1 + \frac{2}{x} \in C$, skąd wnosimy, że $\frac{2}{x}$ musi być liczbą całkowitą.
Szukamy zatem całkowitych dzielników liczby 2. Łatwo widać, że są nimi $D_2 = \{-2, -1, 1, 2\}$.
Czyli

$$x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2.$$

Dla powyższych x wyznaczamy y.
Dla $x = -2$ otrzymujemy $y = 1 + \frac{2}{-2} = 1 - 1 = 0$.

Dla $x = -1$ otrzymujemy $y = 1 + \frac{2}{-1} = 1 - 2 = -1$.
Dla $x = 1$ otrzymujemy $y = 1 + \frac{2}{1} = 1 + 2 = 3$.
Dla $x = 2$ otrzymujemy $y = 1 + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$.

Odpowiedź
Rozwiązaniami powyższego równania są następujące pary liczb całkowitych: $(x, y) = (-2, 0), (-1, -1), (1, 3), (2, 2)$.

Przykład 2
Rozwiąż poniższe równanie w liczbach całkowitych:

$$x \cdot y + x + y = 4$$

Rozwiązanie:
Podstawiając w powyższym równaniu $x = s - 1$, $y = v - 1$, otrzymujemy kolejno

$$(s - 1) \cdot (v - 1) + s - 1 + v - 1 = 4$$

$$sv - s - v + 1 + s - 1 + v - 1 = 4$$

$$sv - 1 = 4$$

$$sv = 5$$

Ponieważ $s, v \in C$ z powyższego iloczynu otrzymujemy następujące pary rozwiązań:

$$(s, v) = (-5, -1), (-1, -5), (1, 5), (5, 1).$$

Ale

$$x = s - 1, \quad y = v - 1.$$

Zatem:
Dla $(s, v) = (-5, -1)$ otrzymujemy :$x = -5 - 1 = -6$ i $y = -1 - 1 = -2$
Dla $(s, v) = (-1, -5)$ otrzymujemy :$x = -1 - 1 = -2$ i $y = -5 - 1 = -6$
Dla $(s, v) = (1, 5)$ otrzymujemy :$x = 1 - 1 = 0$ i $y = 5 - 1 = 4$
Dla $(s, v) = (5, 1)$ otrzymujemy :$x = 5 - 1 = 4$ i $y = 1 - 1 = 0$

Odpowiedź
Rozwiązaniami powyższego równania są następujące pary liczb całkowitych: $(x, y) = (-6, -2), (-2, -6), (0, 4), (4, 0)$.

Przykład 3
Rozwiąż poniższe równanie w liczbach całkowitych:

$$x^2 + 2x = y^2$$

Rozwiązanie:
Przekształcając dane równanie (korzystając z wzorów skróconego mnożenia) otrzymujemy kolejno

$$x^2 + 2x = y^2$$
$$(x+1)^2 - 1 = y^2$$
$$(x+1)^2 - y^2 = 1$$
$$(x+1-y) \cdot (x+1+y) = 1$$
$$(x-y+1) \cdot (x+y+1) = 1$$

Ponieważ liczby x, y są na mocy założenia liczbami całkowitymi, więc liczby $x-y+1, x+y+1$ też są liczbami całkowitymi, oraz jedynymi rozkładami liczby 1 na iloczyn dwóch liczb całkowitych są $1 \cdot 1$ i $(-1) \cdot (-1)$ toteż otrzymujemy do rozpatrzenia dwa poniższe przypadki:

- $x - y + 1 = -1 \wedge x + y + 1 = -1$, skąd
$$(x, y) = (-2, 0)$$
- $x - y + 1 = 1 \wedge x + y + 1 = 1$, skąd
$$(x, y) = (0, 0)$$

Odpowiedź:
Rozwiązaniami powyższego równania są następujące pary liczb całkowitych:

$$(x, y) = (-2, -4), (0, 0).$$

Przykład 4
Rozwiąż poniższe równanie w liczbach całkowitych:

$$x^2 + 2 = y^2$$

Rozwiązanie:
Korzystając z *wzoru na różnicę kwadratów* mamy kolejno:

$$x^2 + 2 = y^2$$

$$x^2 - y^2 = -2$$
$$(x-y)\cdot(x+y) = -2$$

Ponieważ, jedyne możliwe rozkłady liczby -2 na iloczyn liczb całkowitych to $(-2)\cdot 1$ oraz $(-1)\cdot 2$ więc otrzymujemy stąd cztery przypadki do rozważenia:

- $x-y=-2$ i $x+y=1$, skąd $2x=-1$, więc $x \notin C$ czyli brak rozwiązań.
- $x-y=1$ i $x+y=-2$, skąd $2x=-1$, więc $x \notin C$ czyli brak rozwiązań.
- $x-y=2$ i $x+y=-1$ skąd $2x=1$, więc $x \notin C$ czyli brak rozwiązań.
- $x-y=-1$ i $x+y=2$ skąd $2x=1$, więc $x \notin C$ czyli brak rozwiązań.

Reasumując otrzymujemy

Odpowiedź
Powyższe równanie diofantyczne nie posiada żadnych rozwiązań.

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Definicja 1
Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x (inaczej *moduł* x) określamy w następujący sposób :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ jeżeli } x \geqslant 0 \\ -x \text{ jeżeli } x < 0 \end{cases}$$

Dla przykładu $|-6| = 6,\ \ |87| = 87,\ \ |0| = 0.$

Podstawowe własności wartości bezwzględnej podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1
Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzą poniższe własności:

(a) $|x| \geqslant 0$,

(b) $|x| = 0 \iff x = 0$,

(c) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$,

(d) $|x-y| \leqslant |x| + |y|$,

(e) $|x+y| \geqslant ||x|-|y||$,

(f) $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$,

(g) $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$,

(h) $|x| : |y| = |x : y|$,

(i) $|x|^2 = x^2$.

Przykład 1
Rozwiąż równanie:

$$|x+3| = 5$$

Rozwiązanie:
$|x+3| = 5$, zatem $x+3=5$ lub$x+3=-5$, skąd

$$x = 2 \text{ lub } x = -8$$

Odpowiedź
Powyższe równanie posiada dwa rozwiązania $x = 2$, $x = -8$.

Przykład 2
Rozwiąż równanie:

$$|||x+3|-5|+2| = 10$$

Rozwiązanie:
$|||x+3|-5|+2| = 10$, więc

$$||x+3|-5|+2 = 10 \text{ lub } ||x+3|-5|+2 = -10$$

skąd

$$||x+3|-5| = 8 \text{ lub } ||x+3|-5| = -12$$

Ponieważ wartość bezwzględna przyjmuje tylko wartości nieujemne więc równanie $||x+3|-5| = -12$ jest *sprzeczne* czyli nie ma rozwiązań. Pozostaje więc nam tylko do rozpatrzenia równanie $||x+3|-5| = 8$.
Jeżeli $||x+3|-5| = 8$, to

$$|x+3|-5 = 8 \text{ lub } |x+3|-5 = -8,$$

czyli

$$|x+3| = 13 \text{ lub } |x+3| = -3.$$

Podobnie jak poprzednio wnioskujemy, że równanie $|x+3| = -3$, jest sprzeczne zatem pozostaje do rozpatrzenia tylko równanie

$$|x+3| = 13$$

skąd

$$x+3 = 13 \text{ lub } x+3 = -13$$

czyli

$$x = 10 \text{ lub } x = -16.$$

Odpowiedź
Powyższe równanie posiada dwa rozwiązania $x = 10$, $x = -16$.

Przykład 3
Rozwiąż równanie:

$$x^2 - |x| = 0$$

Rozwiązanie:
Naa mocy własności wartości bezwzględnej $|x|^2 = x^2$ otrzymujemy:

$$|x|^2 - |x| = 0$$

Wyłączając wspólny czynnik ("$|x|$") przed nawias mamy

$$|x|(|x|-1) = 0.$$

Skąd

$$|x| = 0 \text{ lub } |x| - 1 = 0$$

a więc

$$x = 0 \text{ lub } |x| = 1.$$

czyli

$$x = 0 \text{ lub } x = -1 \text{ lub } x = 1.$$

Odpowiedź
Powyższe równanie posiada trzy rozwiązania $x = -1$, $x = 0, x = 1$.

Przedziały liczbowe

Definicja 1
Przedziałami liczbowymi nazywamy zdefiniowane poniżej w podpunktach (a)-(h).

(a) $(a, b) = \{x : a < x < b\}$,

(b) $[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$

(c) $(a, b] = \{x : a < x \leqslant b\}$

(d) $[a, b) = \{x : a \leqslant x < b\}$

(e) $(a, +\infty) = \{x : a < x\}$,

(f) $(-\infty, a) = \{x : a > x\}$,

(g) $(-\infty, a] = \{x : a \geqslant x\}$,

(h) $[a, +\infty) = \{x : a \leqslant x\}$.

Do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną użyteczne będzie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1
Jeżeli $w(x)$ jest wyrażeniem algebraicznym zminnej x to zachodzą następujące własności:

1. $|w(x)| < a \iff w(x) < a \wedge w(x) > -a$,

2. $|w(x)| \leqslant a \iff w(x) \leqslant a \wedge w(x) \geqslant -a$,

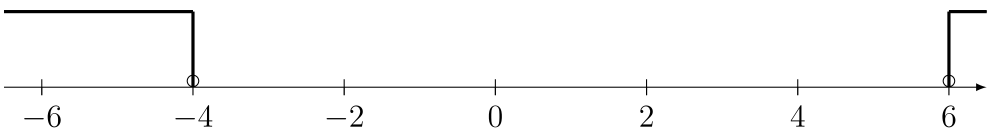
3. $|w(x)| > a \iff w(x) > a \vee w(x) < -a$,

4. $|w(x)| \geqslant a \iff w(x) \geqslant a \wedge w(x) \leqslant -a$,

Przykład 1
Rozwiąż poniższą nierówność. Zbiór rozwiązań zapisz za pomocą przedziału i zaznacz na osi liczbowej.

$$|x - 1| > 5$$

Rozwiązanie:
$|x-1| > 5 \iff x-1>5 \vee x-1<-5$
zatem $x>6 \vee x<-4$,



Odpowiedź
$x \in (-\infty,-4) \cup (6,+\infty)$

Przykład 2
Rozwiąż poniższą nierówność. Zbiór rozwiązań zapisz za pomocą przedziału.

$$|x-1| \leqslant 5$$

Rozwiązanie:
$|x-1|| \leqslant 5 \iff x-1 \leqslant 5 \wedge x-1 \geqslant -5$
zatem $x \leqslant 6 \wedge x \geqslant -4$,

Odpowiedź
$x \in [-4,6]$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1
Rozwiąż poniższe nierówności a następnie zapisz rozwiązanie używając przedziałów oraz zaznacz je na osi liczbowej:

(a) $|x-1| \geqslant 11$

(b) $|7x-27| < 2$

(c) $|x-6| \leqslant 5$

(d) $||x-2|-x| > 11$

Zadanie 2
Rozwiąż nierówność

$$x^2-6|x| \geqslant |x|-2.$$

Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Pojęcie układu i rozwiązania układu

Układem dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy dwa równania liniowe z których każde zawiera dwie niewiadome (x i y) zapisywane najczęściej w następujący sposób

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \tag{1}$$

gdzie a, b, c, d, e, f są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, natomiast x, y pełnią rolę niewiadomych.
Rozwiązaniem układu (1) nazywamy każdą parę uporządkowaną (x_0, y_0) dla której spełnione są jednocześnie równości

$$ax_0 + by_0 = c \text{ oraz } dx_0 + ey_0 = f. \tag{2}$$

Rozwiązać układ równań to znaczy znaleźć wszystkie jego rozwiązania lub stwierdzić, że nie posiada żadnych rozwiązań .

Typy układów

Ze względu na ilość rozwiązań układy równań postaci (1) możemy podzielić na trzy rodzaje:

- **układy oznaczone** to znaczy takie, które mają dokładnie jedno rozwiązanie,
- **układy nieoznaczone** to znaczy takie, które mają nieskończenie wiele rozwiązań,
- **układy sprzeczne** to znaczy takie, które nie mają wcale rozwiązań.

Metody rozwiązywania układu dwóch równań liniowych, z dwiema niewiadomymi

Metody rozwiązywania układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi przedstawimy na przykładzie układu:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ -2x - 4y = -22. \end{cases} \tag{3}$$

(a) Metoda podstawiania.
Z pierwszego równania wyznaczamy niewiadomą x, mianowicie

$$x = \frac{3}{5}y + \frac{3}{5} \tag{4}$$

i wstawiamy ją do drugiego równania otrzymując w ten sposób równanie z jedną niewiadomą postaci:

$$\begin{gathered} -2 \cdot \left(\frac{3}{5}y + \frac{3}{5}\right) - 4y = -22 \quad | \cdot 5 \\ -6x - 6 - 20y = -110 \quad | + 6 \\ -26y = -104 \quad | : (-26) \\ y = 4. \end{gathered}$$

Podstawiamy teraz $y = 4$ do wyrażenia (4) i obliczamy w ten sposób wartość drugiej niewiadomej:

$$x = \frac{3}{5} \cdot 4 + \frac{3}{5} = \frac{12}{5} + \frac{3}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Zatem potencjalnym kandydatem na rozwiązanie układu (3) jest para $(3, 4)$. Pozostaje jeszcze sprawdzić, że para $(3, 4)$ jest rzeczywiście rozwiązaniem układu (3) co pozostawiamy czytelnikowi.
(b) Metoda przeciwnych współczynników.
Mnożymy pierwsze równanie układu (3) obustronnie przez 2 drugie zaś obustronnie przez 5 (robimy to dlatego by współczynniki liczbowe przy niewiadomej x w pierwszym i w drugim równaniu były liczbami przeciwnymi). Otrzymujemy w ten sposób układ:

$$\begin{cases} 10x - 6y = 6 \\ -10x - 20y = -110. \end{cases} \tag{5}$$

Teraz dodajemy do siebie stronami równania układu (5) w następujący sposób

$$\begin{array}{c|cccc} & 10x & -\,6y & = & 6 \\ + & -10x & -\,20y & = & \text{-110} \\ \hline & = & -26y & = & \text{-104.} \end{array}$$

Otrzymujemy w ten sposób jedno równanie z jedną niewiadomą y :

$$-\,26y = -104 \quad | : (-26) \tag{6}$$

Po rozwiązaniu którego otrzymujemy szukaną wartość $y = 4$. Teraz podstawiając tę wartość do któregokolwiek z równań układu (3) np. do drugiego otrzymujemy kolejno:

$$-2x - 4 \cdot 4 = -22$$

$$-2x - 16 = -22$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3.$$

Tak więc potencjalnym kandydatem na rozwiązanie układu jest para $(3, 4)$ i pozostaje tak jak poprzednio tylko sprawdzenie, że para ta w istocie rozwiązaniem jest.

(c) Metoda wyznaczników.

Zanim przedstawimy tę metodę wprowadzimy pewne pojęcia, które będą w dalszej części użyteczne. Pojęciami tymi będą: *pojęcie macierzy kwadratowej stopnia 2 i pojęcie wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia 2.*

Tak więc *macierzą kwadratową stopnia 2* nazywamy tablicę o dwóch wierszach i dwóch kolumnach, której elementami są liczby rzeczywiste, zapisywaną w następujący sposób:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Każdej macierzy A (takiej jak powyżej) odpowiada pewna liczba rzeczywista określona następująco:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Liczbę tą nazywamy *wyznacznikiem macierzy kwadratowej stopnia 2* i oznaczamy tak jak zrobiono to powyżej symbolem $\det A$.

Rozważmy teraz nasz układ równań:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases} \tag{7}$$

Układowi temu odpowiadają trzy macierze określone następująco:

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}, U_x = \begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}, U_y = \begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}.$$

Można udowodnić, że jeżeli $\det U \neq 0$ to układ (7) ma dokładnie jedno rozwiązanie, które wyraża się wzorami:

$$x = \frac{\det U_x}{\det U}, y = \frac{\det U_y}{\det U},$$

które noszą nazwę *wzorów Cramera .*
Powróćmy teraz do naszego układu:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ -2x - 4y = -22. \end{cases} \tag{8}$$

W tym przypadku mamy:

$$\det U = \det \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = 5 \cdot (-4) - (-2) \cdot (-3) = -26,$$

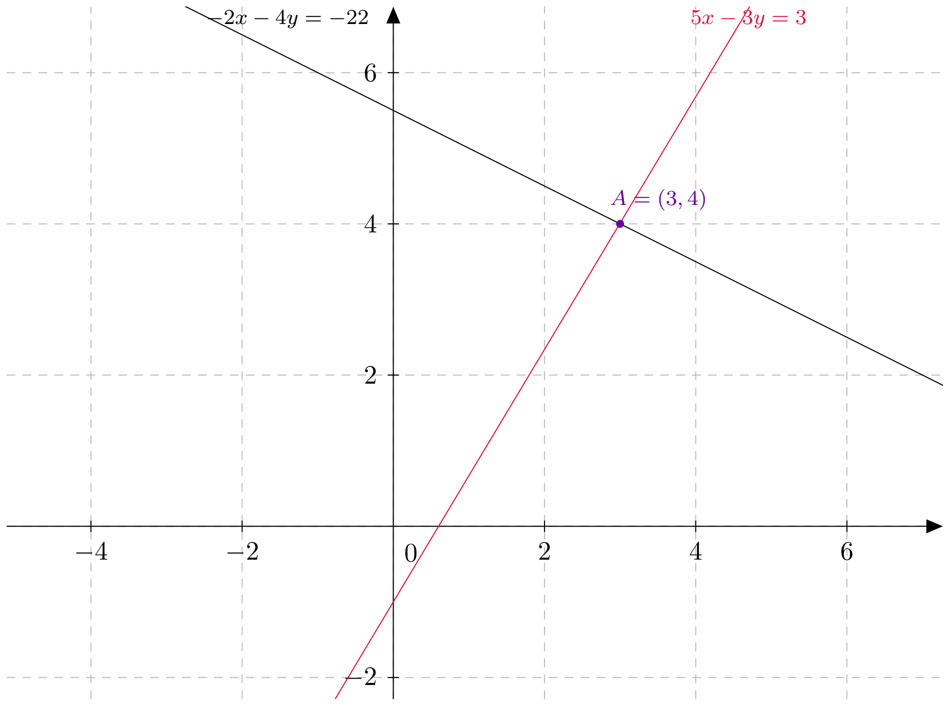
$$\det U_x = \det \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -22 & -4 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-4) - (-22) \cdot (-3) = -78,$$

$$\det U_y = \det \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -22 \end{bmatrix} = 5 \cdot (-22) - (-2) \cdot 3 = -104.$$

Zatem z wzorów Cramera otrzymujemy rozwiązanie:

$$x = \tfrac{-78}{-26} = 3,\ y = \tfrac{-104}{-26} = 4.$$

Czyli rozwiązaniem układu (8) jest para $(3, 4)$.
(d) Metoda graficzna.
Metoda graficzna polega na wykreśleniu prostych, których równania są równaniami układu równań (1). Wspólrzędne punktu przecięcia się tych prostych są rozwiązaniem układu. Dla układu (8) metoda ta jest przedstawiona na poniższym rysunku:



Z rysunku odczytujemy, że punkt $A = (3, 4)$ jest rozwiązaniem układu (8).

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. W pewnej liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry jedności. Wiedząc że liczba o przestawionych cyfrach jest o 18 mniejsza od początkowej wyznacz wszystkie liczby spełniające warunki.

Zadanie 2. Uczniów pewnej szkoły ustawiono w kwadrat (tj. tyle samo rzędów, co uczniów w rzędzie). Następnie próbowano ich ustawić w prostokąt, zmniejszając liczbę rzędów o 4, a zwiększając o 5 liczbę uczniów w rzędzie. Okazało się, że brakuje 3 uczniów do wypełnienia tego prostokąta. Ilu uczniów liczyła ta szkoła?

Zadanie 3. W pewnej klasie dziewczęta stanowiły 25% liczby uczniów. Do klasy przybyła jedna osoba i wówczas odsetek dziewcząt wzrósł do 28%. Ilu chłopców jest w tej klasie?

Zadanie 4. Pierwszy rowerzysta wyjeżdża na trasę o godzinie 12 : 00. Z tego samego miejsca pół godziny później w tym samym kierunku wyjeżdża drugi rowerzysta. Oblicz prędkości obu rowerzystów, jeśli wiadomo, że drugi jedzie o 5 km/h szybciej niż pierwszy i dogoni pierwszego o godzinie 14 : 30.

Zadanie 5. Wnuczek ma tyle miesięcy co dziadek lat. Razem maja 91 lat. Ile lat ma dziadek, a ile wnuczek?

Zadanie 6. Dwa lata temu Jacek był dwa razy starszy od Piotrka. Za dwa lata będą mieli razem 26 lat. Ile lat ma każdy z nich?

Zadanie 7. W naczyniu znajduje się 10 kg dziesięcioprocentowej solanki. Gdybyśmy odlali pewną ilość tej solanki, a następnie do pozostałej części dolali pewną ilość sześcioprocentowej solanki, to otrzymalibyśmy 6 kg solanki ośmioprocentowej. Ile kilogramów solanki musielibyśmy odlać, a ile dolać?

Zadanie 8. Z miejscowości A i B wyruszyli naprzeciw siebie dwaj podróżni, maszerujący z różną średnią prędkością. Po spotkaniu jeden z nich musiał jeszcze maszerować do celu 16 godzin, a drugi 9. Ile czasu potrzeba każdemu z nich na przebycie całej drogi?

Zadanie 9. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x(x+3) - \frac{1}{2}x + y = 1 + \frac{1}{2}x^2 \\ (x-3y)^2 - x^2 = 3y(3y-1) - 6x(y+1) + 3 \end{cases}$$

Zadanie 10. Dany jest układ równań.

$$\begin{cases} x - y = k \\ 4x + 2y = 10k + 6 \end{cases}$$

(a) Wyznacz z układu równań x i y za pomocą k.

(b) Dla jakich k rozwiązaniem układu jest para liczb ujemnych?

Zadanie 11. Rozwiąż układy równań

(a) $\begin{cases} \frac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \frac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \frac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y^2 = 2x - 1 \\ x^2 = 2y - 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 23 \\ x + 2y + 4z = 22 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = zt \\ z^2 + t^2 = xy \end{cases}$

(e) $\begin{cases} xy = x + y + 1 \\ yz = y + z + 3 \\ zx = z + x + 7 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y = -9 \\ y^2 - 2x - 4y = -9 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -5 \\ x + y^2 = -2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} xy = 1 \\ yz = 2 \\ zt = 3 \\ tu = 4 \\ ux = 5 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} (x + y)^2 = 4z \\ (y + z)^2 = 4x \\ (z + x)^2 = 4y \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x^2 - 3x = y - 3 \\ y^2 - 3y = z - 4 \\ z^2 - 3z = x - 5 \end{cases}$

Nierówność między średnimi

Zadanie 1

Udowodnij, że średnia arytmetyczna dwóch liczb jest nie mniejsza niż ich średnia geometryczna, a ta z kolei nie mniejsza niż ich średnia harmoniczna.

Rozwiązanie:

Musimy pokazać, że dla dowolnych liczb $x, y > 0$ zachodzą poniższe nierówności:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot y} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

Mamy kolejno

$$(a-b)^2 \geqslant 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$$

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \quad |: 2$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab$$

Podstawiając

$$a = \sqrt{x},\ b = \sqrt{y}$$

otrzymamy

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot y}.$$

Podstawiając zaś w ostatniej nierówności

$$x = \frac{1}{v},\ y = \frac{1}{s}$$

otrzymamy

$$\frac{\frac{1}{v}+\frac{1}{s}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{v}}$$

skąd

$$\sqrt{sv} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{s}+\frac{1}{v}},$$

zatem

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot y} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

Twierdzenie 1
Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, ..., a_n$ zachodzi następująca nierówność:

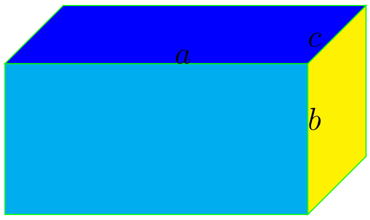
$$\frac{|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|}{n} \geqslant \sqrt[n]{|a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n|}$$

Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|a_1| = |a_2| = ... = |a_n|$.

Problem 1
Sormułuj nierówność pomiędzy średnią geometryczną a średnią harmoniczną dla n liczb a następnie, opierając się na powyższym twierdzeniu udowodnij ją.

Przykład 1
Spośród wszystkich prostopadłościanów o polu powierzchni całkowitej równym 6 znajdź ten, który ma największą objetość.

Rozwiązanie



Oznaczmy przez a, b, c długości krawędzi prostopadłościanu, przez S jego pole powierzchni całkowitej, zaś przez V jego objętość.
Mamy zatem:
$S = 2ab + 2ac + 2bc = 6$, skąd otrzymujemy $ab + ac + bc = 3$, $V = abc$.
$\sqrt[3]{v^2} = \sqrt[3]{(abc)^2} = \sqrt[3]{(ab)\cdot(ac)\cdot(bc)}$.
Korzystając z nierówności między średnimi otrzymujemy:
$\sqrt[3]{(ab)\cdot(ac)\cdot(bc)} \leqslant \frac{ab+bc+ac}{3} = \frac{3}{3} = 1$
$\sqrt[3]{V^2} = 1$. Podnosząc obustronnie do sześcianu otrzymujemy $V^2 = 1^3 = 1$, zatem $V = \sqrt{1} = 1$
Zatem objętość tego prostopadłościanu nie przekracza liczby 1, przy czym ta równość zajdzie, wtedy i tylko wtedy, gdy $ab = bc = ac$, z czego wynika, że $a = b = c$.

Odpowiedź
Największą objetość spośród wszystkich prostopadłościanów o polu powierzchni całkowitej równej 6 ma sześcian o krawędzi długości 1.

Uwaga !
Rozumując, jak powyżej można uzasadnić, że spośród wszystkich prostopadłościanów o danym polu powierzchni całkowitej S największą objetość ma sześcian o krawędzi długości $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

Przykład 2
Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierównośc:

$$a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant 4$$

Rozwiązanie
Korzystając z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną mamy

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2,$$

podobnie

$$b + \frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{b}} = 2.$$

Dodając powyższe nierówności stronami mamy

$$b + \frac{1}{b} + a + \frac{1}{a} \geqslant 2 + 2 = 4.$$

co należało udowodnić.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1

(a) Udowodnij, (nie korzystając z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną dla n liczb), że

$$a + b + c + d \geqslant 4\sqrt[4]{abcd}$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d.

(b) Spośród wszystkich prostokątów o polu powierzchni równym S znajdź ten, który ma największe pole.

(c) Liczbę 100 rozłóż na sumę czterech składników tak aby iloczyn tych składników był największy.

Liczby wymierne i niewymierne

Definicja 1

Liczbę rzeczywistą a nazywamy *liczbą wymierną*, jeżeli istnieje taka liczba całkowita p i liczba całkowita $q \neq 0$, że $a = \frac{p}{q}$.
Zbiór liczb wymiernych oznaczamy symbolem W.

Defincja 2

Liczby rzeczywiste, które nie są liczbami wymiernymi nazywamy *liczbami* *niewymiernymi.*

Ćwiczenie 1
Uzasadnij, że poniższe liczby są liczbami wymiernymi:
a) 7
b) -3.5
c) $0.(3)$
Rozwiązanie:
ad a) $7 = \frac{7}{1}$
ad b) $-3.5 = \frac{-35}{10}$
ad c) $0.(3) = \frac{1}{3}$.

Uwaga!
Każda liczba całkowita k jest liczbą wymierną, gdyż $k = \frac{k}{1}$.

Twierdzenie 1
Liczba rzeczywista $0 \leqslant a < 1$ jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy jej rozwinięcie w systemie dziesiętnym jest albo skończone, albo nieskończone okresowe.
Powyższe twierdzenie rozstrzyga o niewymierności dowolnej liczby rzeczywistej (jeżeli znamy jej rozwinięcie dziesiętne), gdyż każdą liczbę rzeczywistą x możemy zapisać w postaci $x = m \pm a$, gdzie m jest liczbą całkowitą oraz $0 \leqslant a < 1$.
Udowodnimy teraz, że istnieją liczby niewymierne.

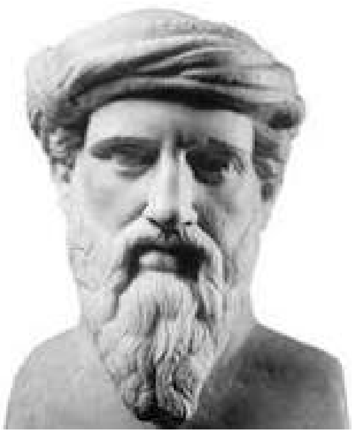
Twierdzenie 2
Liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód
Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Zatem istnieją naturalne liczby względnie pierwsze p i q, $q \neq 0$, takie że $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Podnosząc obustronnie do kwadratu otrzymujemy $2 = \frac{p^2}{q^2}$, czyli $p^2 = 2q^2$, zatem $2 \mid p^2$. Z zasadniczego twierdzenia arytmetyki wynika, że $2 \mid p$. Zatem $p = 2k$, $k \in N$. Otrzymujemy dalej $(2k)^2 = 2q^2$, czyli $4k^2 = 2q^2$, skąd $q^2 = 2k^2$, czyli $2 \mid q^2$, więc $2 \mid q$.
Zatem $\mathrm{NWD}(p, q) \geqslant 2$, sprzeczność.
Zatem założenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną doprowadza nas do sprzeczności, czyli jest ono nieprawdziwe a to oznacza, że liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Twierdzenie Pitagorasa

Zadanie 1
Za pomocą cyrkla i linijki zbuduj trójkąt o bokach długości:
a) $a = 2, b = 2, c = 1$
b) $a = 3, b = 2, c = 2$
c) $a = 3, b = 4, c = 5$
d) $a = 5, b = 12, c = 13$
i oblicz do każdego przypadku $a^2 + b^2 - c^2$. Co zauważyłeś?

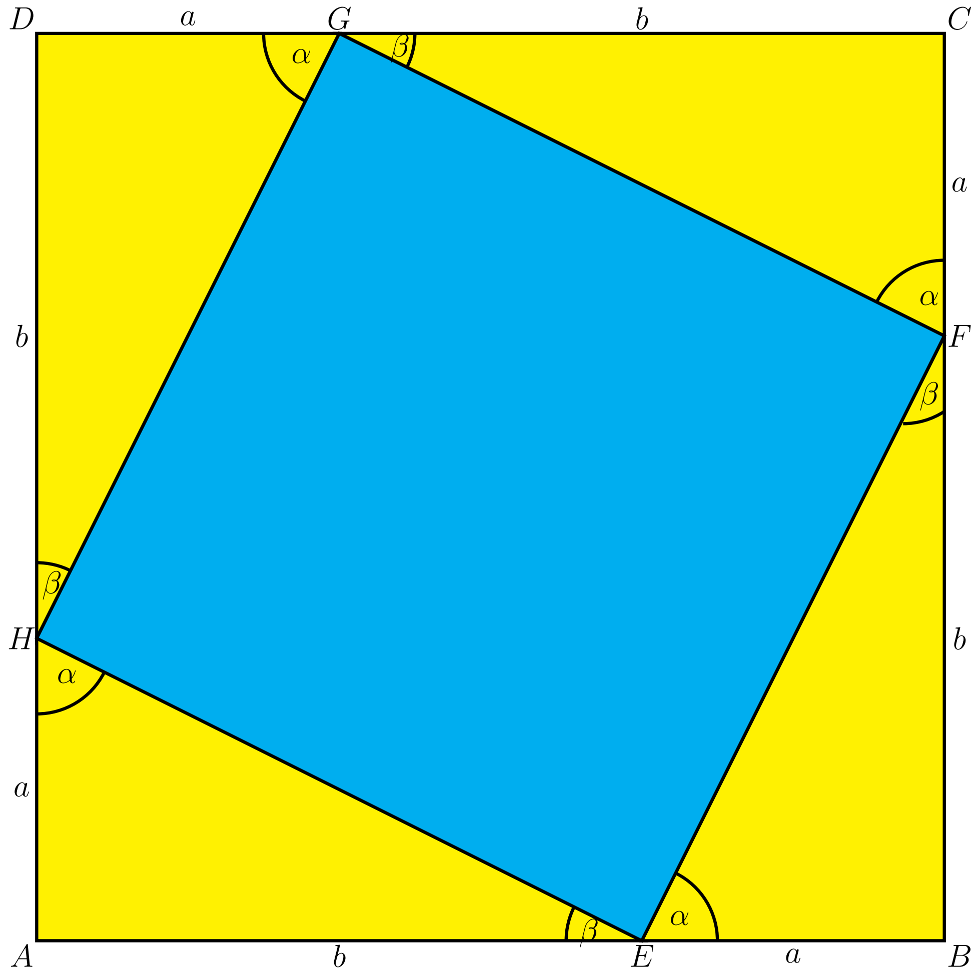
Grecki matematyk i filozof, założyciel tzw. szkoły pitagorejskiej w Krotonie (południe Włoch). W szkolej tej rozważano między innymi takie problemy matematyczne, jak podwojenie sześcianu, trysekcja kąta, kwadratura koła itp. Do klasycznej wiedzy matematycznej przeszło słynne twierdzenie, powszechne zwane twierdzeniem Pitagorasa. O samym Pitagorasie wiemy niewiele. Prąd filozoficzno-religijny związany z jego imieniem trwał przez dwa wieki i nie sposób ustalić, co on zawdzięcza Pitagorasowi, a co jego uczniom. Dlatego mówić należy raczej o pitagoreizmie.



Rysunek 6: Pitagoras

Twierdzenie Pitagorasa
Niech $a \leqslant b \leqslant c$ będą długościami boków trójkąta $\triangle ABC$. Wówczas trójkąt $\triangle ABC$ jest prostokątny, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

Poniżej przedstawiamy jeden z wielu dowodów tego twierdzenia
Dowód



Konstruujemy kwadrat ABCD o boku długości $a + b$. A następnie na boku AB obieramy punkt E, taki, że $|AE| = b, |EB| = a$. Podobnie punkty F, G i H. Wówczas trójkąty: $\triangle AEH$, $\triangle EBF$, $\triangle GCF$, $\triangle DGH$ są przystające z zasady *bkb*, gdyż mają dwa boki równej długości i kąty zawarte między tymi bokami równej miary. Więc mają wszystkie odpowiednie boki równej długości i wszystkie odpowiednie kąty równej miary. Wynika stąd, że czworokąt $EFGH$ jest kwadratem.

Zatem

$P_{ABCD} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Z drugiej strony

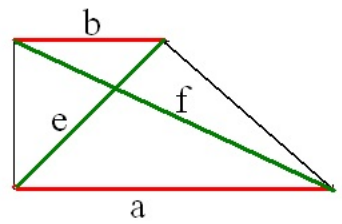
$P_{ABCD} = P_{EFGH} + 4 \cdot P_{AEH} = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab$

$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$ a zatem po przekształceniu otrzymujemy $a^2 + b^2 = c^2$.

Problem
Znajdź i przedstaw inny dowód Twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia Pitagorasa
Niech $a \leqslant b \leqslant c$ będą długościami boków trójkąta $\triangle ABC$. Wówczas jeżeli $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt $\triangle ABC$ jest trójkątem prostokątnym.

Zadanie 1
Uzasadnij, że w trapezie prostokątnym różnica kwadratów podstaw jest równa różnicy kwadratów przekątnych.



Rysunek 7:

Teza: $a^2 – b^2 = f^2 – e^2$

Okręgi wpisane i opisane na czworokątach

Kąt wpisany i kąt środkowy w okręgu

Definicja 1
Kątem wpisanym w okrąg o środku w punkcie A i promirniu r opartym na łuku CD nazywamy dowolny kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, zaś jego ramiona przechodzą przez punkty C i D, oraz łuk CD leży wewnątrz tego kąta.

Definicja 2
Kątem środkowym w okręgu o środku w punkcie A i promieniu r opartym na łuku CD nazywamy dowolny kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, zaś jego ramiona przechodzą przez punkty C i D, oraz łuk CD leży wewnątrz tego kąta.

Zachodzi następujące twierdzenie, które podaje związek pomiędzy miarą kąta wpisanego i miarą kąta środkowego, które są oparte na tym samym łuku.

Twierdzenie 1
Niech dany będzie okrąg o środku w punkcie A i promieniu r i niech C, D, E będą różnymi punktami na okręgu. Wówczas:

$$|\measuredangle CDA| = 2 \cdot |\measuredangle CDE|$$

Wniosek
Wszystkie kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.

Czworokąty wpisane w okrąg

Jak wiadomo, każdy trójkąt można wpisać w okrąg. Wynika to z faktu, że symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Nie jest to jednak prawdą dla czworokątów, ani ogólniej dla wielokątów o liczbie boków większej niż trzy.

Problem 1
Podaj przykład z uzasadnieniem czworokąta, którego nie da się wpisać w żaden okrąg.

Twierdzenie 1
Czworokąt $ABCD$ da się wpisać w okrąg, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$|\measuredangle ABC| + |\measuredangle ADC| = 180^o$$

Czworokąty opisane na okręgu

Podobnie, jak nie każdy czworokat można wpisać w okrąg, tak również nie każdy czworokąt można opisać na okręgu.

Problem 1
Podaj przykład z uzasadnieniem czworokąta, którego nie da się opisać na

żadnym okręgu.
Podamy teraz warunek konieczny i wystarczający na to, aby czworokąt można było opisać na okręgu.

Twierdzenie 1
Czworokąt $ABCD$ da się opisać na okręgu, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$

Zadanie 1
Przetłumacz z języka angielskiego poniższe zadania a następnie rozwiąż je:

- Can a rhombus that is NOT a square be inscribed in a circle?
- A regular 12 sided polygon is inscribed in a circle of radius 10. A,B,C,D,E are its consecutive vertices taken in that order. Find the area of quad. ABDE.
- Let's say we have a rhombus with diagonals a and b, which contains an inscribed circle. How can we find the area of that circle in terms of a and b?
- What types of trapezoids have circumcircles?

Elementy kombinatoryki

Czy kiedykolwiek zasatnawialiście na ile sposobów może zajść jakieś zjawisko? Dla niektórych z nich określenie na ile sposobow mogą zajść jest bardzo proste. N.p. Ile jest wszystkich możliwości przy jednorazowym rzucie monetą, czy tez sześcienną symetryczną kostką?
Jednak dla niektórych z nich określenie na ile sposobów mogą zajść jest na tyle skomplikowane, że bez znajomości odpowiednich narzędzi kombinatorycznych zliczenie ich jest niemal niemożliwe.
Poniżej postaramy się przedstawić najbardziej elementarne narzędzia, którymi posługuje się *kombinatoryka*, czyli dział matematyki, który zajmuje się zliczaniem, na ile sposobów może zajść jakieś zjawisko. Powstała ona dzięki grom hazardowym a dopiero później rozwinęła się w gałąź nauki.

Reguła iloczynu
Jeżeli pewnego wyboru można dokonać etapami,podejmując wielokrotnie decyzje, co do wyboru poszczególnych elementów, przy czym pierwszą decyzję

podejmujemy na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposoby itd. a ostatnią decyzję podejmujemy na n_k sposobów, i jeśli te decyzję są podejmowane niezależnie od siebie, to całkowita liczba możliwych wyborów jest iloczynem liczb podejmowanych decyzji, tzn. wynosi

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Przykład 1
Mając do dyspozycji: 2 pary butów, 5 par spodni i 7 bluzek na ile sposobów możemy się ubrać?

Rozwiązanie.
Ubierając się musimy podjąć 3 decyzje:
1 dotyczy butów - wybieramy je na $n_1 = 2$ sposoby,
2 dotyczy spodni - wybieramy je na $n_2 = 5$ sposobów,
3 dotyczy bluzki - wybieramy ją na $n_3 = 7$ sposobów.
Jeśli nie dopasowujemy kolorów ubrań i decyzje podejmujemy niezależnie dla każdej części garderoby, to na podstawie reguły mnożenia możemy się ubrać na $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ sposobów.

Reguła dodawania
Jeżeli mamy wybrać pewien element z dwóch zbiorów A i B przy czym zbiór A ma m elementów a zbiór B ma n elementów i zbiory te nie mają wspólnych elementów to wyboru tego dokonać możemy na dokładnie $m + n$ sposobów.

Przykład 2
Mamy do dyspozycji : 3 spódnice żółte i 2 czerwone oraz 4 bluzki żółte i 3 czerwone. Na ile sposobów możemy się ubrać, jeżeli chcemy, aby bluzka i spódnica były w tym samym kolorze?
Rozwiązanie.
Mamy do wyboru dwa kolory, w które możemy się ubrać: żółty - wtedy musimy wybrać jedną z trzech żółtych spódnic i jedną z czterech żółtych bluzek, zatem możemy ubrać się na żółto na $3 \cdot 4 = 12$ sposobów,
albo
czerwony - wtedy musimy wybrać jedną z dwóch czerwonych spódnic i jedną z trzech czerwonych bluzek, zatem możemy ubrać się na czerwono na $2 \cdot 3 = 6$ sposobów.Ponieważ ubierając się na żółto nie możemy jednocześnie ubrać się na czerwono i odwrotnie. Zatem zgodnie z regułą dodawania mamy $12 + 6 = 18$ sposobów ubrania się.

Jeżeli podejmujemy kilka niezależnych decyzji częściowych, które dotyczą jednego całościowego wyboru, to liczby decyzji mnożymy, jeśli natomiast dokonujemy wykluczających się wyborów, to liczby wyborów dodajemy.

Permutacje

Definicja
Permutacją (przestawieniem) nazywamy ustawienie elementów danego zbioru w pewnej kolejności. Liczba permutacji określa na ile sposobów możemy ustawić elementy zbioru w kolejce.
Powiedzmy, że mamy zbiór A, który ma n elementów i chcemy wyznaczyć liczbę wszystkich możliwych ustawień tych elementów w kolejce. Musimy więc podjąć n wyborów dotyczących tego, jaki element ustawić na kolejnym miejscu.
1 wybór –na pierwszym miejscu w kolejce możemy ustawić każdy z n elementów
2 wybór – na drugim miejscu w kolejce możemy ustawić już tylko $n-1$ elementów (bo jeden został już wykorzystany)
3 wybór – na trzecim miejscu w kolejce można ustawić już tylko $n-2$ elementy (bo 2 elementy są już wykorzystane), itd.
$(n-1)$-wszy wybór –na przedostatnim miejscu w tej kolejce możemy ustawić już tylko 2 elementy,
n-ty wybór- na ostatnim miejscu możemy ustawić już tylko jeden element
Zatem zgodnie z regułą mnożenia liczba możliwych wyborów kolejności to:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

Jest to iloczyn liczb naturalnych od 1 do n. Oznaczamy go $n!$ (czytamy n silnia). Zatem liczbę P_n wszystkich permutacji zbioru n- elementowego możemy zapisać w następujący sposób :

$$P_n = n!$$

Przyklad
Na ile sposobów można ustawić w kolejce do kasy biletowej 5 panów i 4 panie, jeżeli:
a) panowie są dżentelmenami i przepuszczają panie przodem?
b) panowie nie byli grzeczni i wepchnęli się przed panie?
c) kolejność nie zależy od płci?

Rozwiązanie a)
Panie można ustawić w obrębie czterech pierwszych miejsc w kolejce na $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby, panów natomiast na kolejnych pięciu miejscach na $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ sposobów. Każde ustawienie pań może wystąpić z każdym ze 120 ustawień panów. Wyboru kolejności pań i panów dokonujemy niezależnie, więc (korzystając z reguły iloczynu) mamy $4! \cdot 5! = 24 \cdot 120 = 2880$ takich możliwych ustawień.

Rozwiązanie b)
Możliwych ustawień jest tyle samo.

Rozwiązanie c)
Ustawiamy w kolejce dziewięcioro ludzi niezależnie od płci, co można zrobić na $9! = 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ czyli na aż 362880 sposobów.

Wariacje
Tworzenie *wariacji* polega na k- krotnym wybieraniu pojedynczych elementów z pośród n elementów, jakie mamy do dyspozycji. Elementy wybierane są po kolei, a nie wszystkie na raz.
Wyróżniamy dwa rodzaje wariacji, w zależności od tego, czy po wybraniu danego elementu może on być użyty jeszcze raz i wybrany ponownie (nazywamy go *wariacją z powtórzeniami*), czy też raz wybrany element nie może być wybrany ponownie (*wariacja bez powtórzeń*).

Wariacje z powtórzeniami
Wybieramy kolejno k elementów spośród n, które mamy do dyspozycji. Za każdym razem wybrany element wraca do pozostałych i może być wybrany ponownie. Zatem musimy podjąć k decyzji:
1 decyzja - na pierwszym miejscu możemy ustawić dowolny z n elementów,
2 decyzja - na drugim miejscu możemy ustawić znowu dowolny z n elementów, itd.
k- ta decyzja - na ostatnim miejscu możemy ustawić dowolny z n elementów.
Na podstawie reguły iloczynu wszystkich możliwych ustawień k elementów wybieranych spośród n elementów (jeśli wybierane elementy mogą się powtarzać) jest:

$$W_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k-\text{razy}} = n^k$$

Przykład
Ile stacjonarnych numerów telefonicznych jest dostępnych w poznańskiej cen-

trali? Wszystkie numery są dziewięciocyfrowe i zaczynają się numerem kierunkowym 61.

Rozwiązanie:
Ponieważ dwie pierwsze cyfry są już ustalone 61, pozostało nam do rozważenia siedem pozostałych pozycji. Cyfry mogą się na nich powtarzać, a kolejność występowania cyfr w numerze też jest istotna. Wybieramy zatem jedną z 10 cyfr na III miejsce, jedną z 10 na IV miejsce itd. aż jedną z 10 cyfr wybierzemy na ostatnim IX miejscu.
Wyborów kolejnych cyfr dokonujemy niezależnie, zatem jest ich tyle, ile siedmioelementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru dziesięcioelementowego, czyli:

$$W_{10}^{7} = 10^{7} = 10000000$$

Wariacje bez powtórzeń
Wybieramy kolejno k elementów spośród n, które mamy do dyspozycji, ale raz wybrane elementy nie mogą zostać użyte ponownie. Zatem musimy podjąć k decyzji:
1 decyzja - na pierwszym miejscu możemy ustawić dowolny z n elementów,
2 decyzja - na drugim miejscu możemy ustawić znowu dowolny z pozostałych $n-1$ elementów, itd. (za każdym razem mamy do dyspozycji o 1 element mniej niż poprzednio)
k- ta decyzja - na ostatnim miejscu możemy ustawić dowolny z pozostałych $n-k+1$ elementów.
Zatem na podstawie reguły iloczynu liczba wszystkich możliwych k- elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru nelementowego wyraża się wzorem:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Przykład
W sali lekcyjnej jest 30 miejsc . Na ile sposobów 5 uczniów może zająć miejsca , jeżeli każdy z nich siada gdzie chce?

Rozwiązanie:
Każdemu rozmieszczeniu uczniów w klasie (czyli zajęciu przez nich miejsc)odpowiada dokładnie jedna 5-elementowa wariacja bez powtórzeń ze zbioru 30-elementowego, czyli wszystkich możliwych rozmieszczeń będzie dokładnie:

$$V_{30}^{5} = \frac{30!}{25!} = \frac{25! \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{25!} = 17100720$$

Kombinacje
Kombinacją nazywamy wybór całej grupy k-elementowej spośród n elementów, jakie mamy do dyspozycji. Nie jest istotna kolejność elementów, jakie wybierzemy, i żaden nie może być wybrany dwukrotnie. Liczbę takich wyborów zapisujemy tzw. symbolem Newtona $\binom{n}{k}$ (czytamy: n po k).
Każdej kombinacji k- elementowej ze zbioru n- elementowego odpowiada dokładnie $k!$ kelementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n- elementowego, gdyż każde k elementów możemy ustawić w kolejce na $k!$ sposobów. Zatem wszystkich tych kombinacji będzie:

$$C_n^k = \frac{1}{k!} \cdot V_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Przykład
Klasa liczy 25 osób. Na ile sposobów można wybrać 3-osobową delegację spośród uczniów tej klasy.

Rozwiązanie:
Ważne są dwie rzeczy: nie jest istotna kolejność, w jakiej dokonujemy wyboru uczniów i uczeń może zostać wybrany do delegacji tylko raz.Wobec tego wystarczy zastosować wzór na liczbę możliwych wyborów 3 elementów spośród 25:

$$\binom{25}{3} = \frac{25!}{3! \cdot (25-3)!} = \frac{25!}{3! \cdot 22!} = \frac{22! \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{22! \cdot 6} = 2300$$

Zadania
Zadanie 1. Które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe:

a) $P_4 \cdot P_5 > W_{10}^4$

b) $P_4 \cdot P_5 > V_{10}^4$

c) $P_5 \cdot C_{10}^5 = V_{10}^5$.

Zadanie 2. Na przyjęciu spotkała się pewna liczba znajomych. Wszyscy znajomi przywitali się (każdy z każdym) poprzez uścisnięcie dłoni. Wiadomo, że nastąpiło dziesięć uścisków dłoni. Ilu przyjaciół spotkało się na tym przyjęciu:

a) 5

b) 4

c) $4 \cdot 25 - 19 \cdot 5$

Zadanie 3. Na salę gimnastyczną wbiegło pięć dziewcząt i pięciu chłopców. Nauczyciel polecił im ustawić się w szeregu. Ile jest wszystkich możliwych ustawień tych osób w szeregu:

a) $10!$

b) $5! \cdot 5!$

c) V_{10}^{10}

Zadanie 4. Na ile różnych sposobów mogą trzy osoby wsiąść do tramwaju złożonego z dwóch wagonów:

a) 2^3

b) 3^2

c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2$

Zadanie 5. Na ile sposobów można podzielić cztery osoby na trzy grupy:

a) 6

b) $\binom{4}{2}$

c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Zadanie 6. Ile słów (niekoniecznie mających sens) można ułożyć ze słowa "SZKOŁA":

a) 6

b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

c) $6!$

Zadanie 7. Na ile sposobów można wybrać sześć liczb z czterdziestu dziewięciu liczb:

a) $6!$

b) $\binom{49}{6}$

c) $49 \cdot 6$

.

Zasada szufladkowa Dirichleta

Twierdzenie 1
Jeżeli m przedmiotów umieścimy w k szufladkach, przy czym $m > k$, to w co najmniej jednej szufladce znajdą się co najmniej dwa przedmioty.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (ur. 13 lutego 1805 w Düren, zm. 5 maja 1859 w Getyndze) – niemiecki matematyk francuskiego pochodzenia. Był wykładowcą uniwersytetów we Wrocławiu, Berlinie i Getyndze. Jego prace dotyczą teorii liczb, szeregów liczbowych, analizy matematycznej, rachunku wariacyjnego i fizyki teoretycznej. Udowodnił zbieżność szeregu Fouriera (warunki Dirichleta), jest autorem zasady szufladkowej Dirichleta.

Rysunek 8: J. Dirichlet

.

Zadanie 1
Przetłumacz z języka angielskiego poniższe zadania a następnie rozwiąż je używając Zasady szufladkowej Dirichleta:

- There are 50 baskets of apples. Each basket contains no more than 24 apples. Show that there are at least 3 baskets containing the same number of apples.
- Show that among any 4 numbers one can find 2 numbers so that their difference is divisible by 3.
- Show that among any n+1 numbers one can find 2 numbers so that their difference is divisible by n.
- Show that for any natural number n there is a number composed of digits 5 and 0 only and divisible by n.

- Given 12 different 2-digit numbers, show that one can choose two of them so that their difference is a two-digit number with identical first and second digit.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Jeżeli przeprowadzamy pewne doświadczenie, w którym możemy otrzymać dokładnie m różnych wyników i rozważamy pewne zdarzenie, którego zajściu sprzyja dokładnie k wyników (spośród tych wszystkim m możliwych wyników) to *prawdopodobieństwo* zajścia zdarzenia A jest równe:

$$P(A) = \frac{k}{m}$$

Zadanie 1
Przetłumacz z języka angielskiego poniższe zadania a następnie rozwiąż je:

- A die is rolled, find the probability that an even number is obtained.
- Two coins are tossed, find the probability that two heads are obtained.
- A die is rolled and a coin is tossed, find the probability that the die shows an odd number and the coin shows a head.
- A card is drawn at random from a deck of cards. Find the probability of getting the 3 of diamond.
- A card is drawn at random from a deck of cards. Find the probability of getting a queen.
- The blood groups of 200 people is distributed as follows: 50 have type A blood, 65 have B blood type, 70 have O blood type and 15 have type AB blood. If a person from this group is selected at random, what is the probability that this person has O blood type?
- What is the probability of getting an odd number when rolling a single 6-sided die?
- What is the probability of getting a 7 after rolling a single die numbered 1 to 6?
- What is the probability of choosing a king from a standard deck of playing cards?

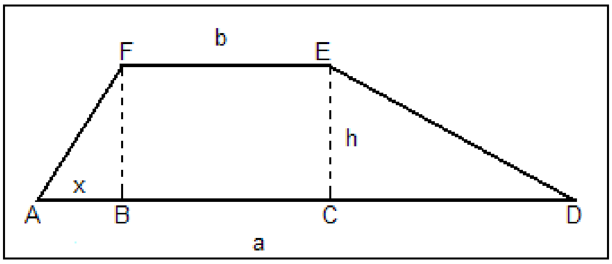
- Let C be the number rolled on the first die and A be the number rolled on the second die. Show that the probability of C being equal to A is 1/6.
- Gareth was told that in his class 50% of the pupils play football, 30% play video games and 30% study mathematics. So if he was to choose a student from the class randomly, he calculated the probability that the student plays football, plays video games, and studies mathematics is 50% + 30% + 30% = 1/2 + 3/10 + 3/10 = 11/10. But all probabilities should be between 0 and 1. What mistake did Gareth make?

Geometria

Przyjmujemy wzór na pole prostokąta o bokach długości a, b :

$$P = a \cdot b$$

Przykład 1
Wyprowadź wzór na pole trapezu.



Rysunek 9:

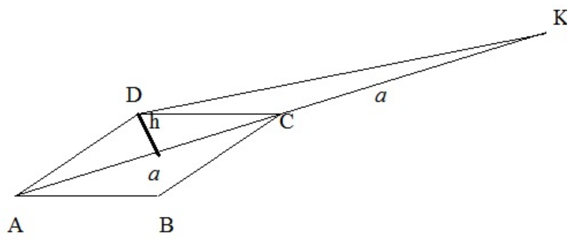
Rozwiązanie
Łatwo widać (Rysunek 1), że:
$P_{ADEF} = P_{ABF} + P_{BCEF} + P_{CDE}$
Ponieważ $|AB| = x, |BC| = b, |CD| = a - (x + b) = a - x - b$, zatem
$P_{ADEF} = \frac{xh}{2} + bh + \frac{(a-x-b)\cdot h}{2} = \frac{xh}{2} + bh + \frac{ah}{2} - \frac{xh}{2} - \frac{bh}{2}$
Po redukcji otrzymujemy zatem

$$P_{ADEF} = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

Przykład 2

Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano punkt K taki, że długości odcinków AC i CK są równe. Uzasadnij, że pole trójkąta ACD jest równe polu trójkąta CDK.

Rozwiązanie



Rysunek 10:

Łatwo zauważyć, że że odcinek h jest zarówno wysokością trójkąta ACD opuszczoną na bok AC oraz wysokością trójkąta DCK opuszczoną na przedłużenie boku CK.

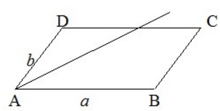
$P_{ADC} = \frac{|AC| \cdot h}{2}$, $P_{CDK} = \frac{|CK| \cdot h}{2}$

Ale $|AC| = |CK| = a$.

Zatem $P_{ADC} = P_{CDK} = \frac{a \cdot h}{2}$

Przykład 3

Boki równoległoboku $ABCD$ są równe a i $b(a > b)$. Uzasadnij, że długości odcinków, na które dwusieczna kąta ostrego równoległoboku podzieli bok o długości a wynoszą b oraz a–b.

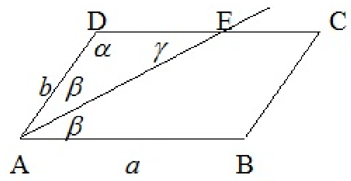


Rysunek 11:

Rozwiązanie

Wprowadzamy na rysunku dodatkowe oznaczenia:

Z własności dwusiecznej kąta ostrego wynika, że miary kątów DAE i BAE są równe (na rysunku oznaczone zostały jako β). Kąty $BAE = \beta$ oraz



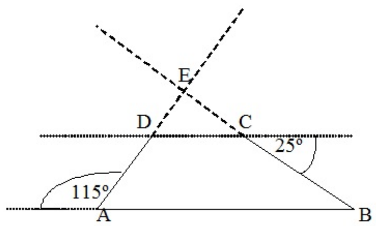
Rysunek 12:

$AED = \gamma$ są katami naprzemianległymi, czyli są równej miary . Zatem $\beta = \gamma$. Z tego wynika, że trójkąt AED jest równoramienny (kąty przy podstawie są jednakowej miary). Stąd dalej otrzymujemy, że $|AD| = |DE| = b$. Odcinek $|EC| = |DC|–|DE| = a–b$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1
Wyprowadź wzór na pole trójkata.

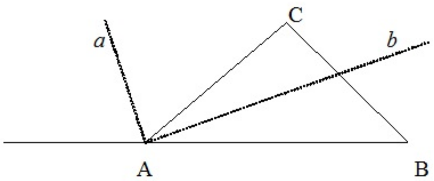
Zadanie 2
W trapezie $ABCD$ przedłużenia ramion AD i BC przecięły się w punkcie E (rysunek). Uzasadnij, ze kąt AEB jest kątem prostym.



Rysunek 13:

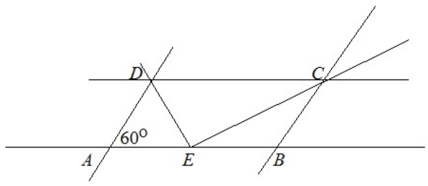
Zadanie 3
Uzasadnij, że dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta ABC i dwusieczna kąta zewnętrznego przy tym samym wierzchołku są prostopadłe. Pamiętaj, że kątem zewnętrznym trójkąta nazywamy kąt przyległy do kąta wewnętrznego.

a - dwusieczna kąta zewnętrznego, b - dwusieczna kąta wewnętrznego



Rysunek 14:

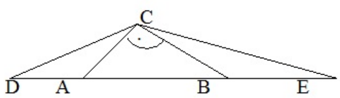
Zadanie 4
Na podstawie rysunku uzasadnij, że trójkąt CED jest prostokątny.



Rysunek 15:

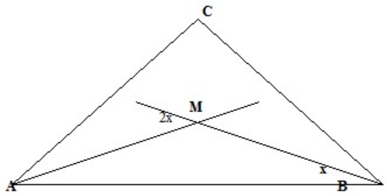
$$AB||CD, AD||BC, \ |AE| = |AD| = |EB|$$

Zadanie 5
W trójkącie prostokątnym ABC wykonano następujące czynności:
1. przedłużono przeciwprostokątną AB,
2. odłożono odcinki $AD = AC$ oraz $BE = BC$.
Uzasadnij, że kąt DCE ma miarę 135^o.



Rysunek 16:

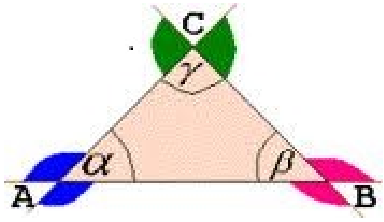
Zadanie 6
Półproste AM i BM są dwusiecznymi dwóch kątów trójkąta ABC. Udowodnij, że trójkąt ten jest równoramienny.
Zadanie 7
Punkt E jest środkiem boku AB równoległoboku $ABCD$. Punkt ten połączono z wierzchołkiem C. Uzasadnij, że pole trójkąta EBC jest trzy razy



Rysunek 17:

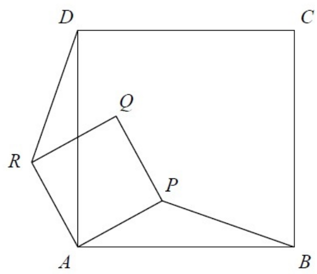
mniejsze od pola czworokąta $AECD$.

Zadanie 8
Kąt zewnętrzny trójkąta jest to każdy kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta (rysunek 18). Wykaż, że suma miar wszystkich kątów zewnętrznych trójkąta jest równa 720^o.



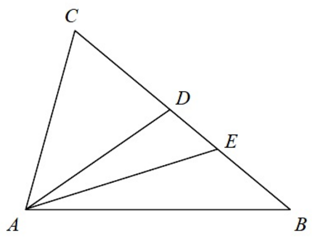
Rysunek 18:

Zadanie 9
Czworokąty $ABCD$ i $APQR$ są kwadratami (rysunek 19). Udowodnij, że $|BP| = |DR|$.



Rysunek 19:

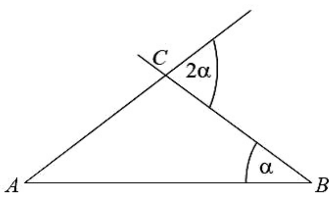
Zadanie 10
Na boku BC trójkąta ABC wybrano punkt D tak, by $\measuredangle CAD = \measuredangle ABC$.



Rysunek 20:

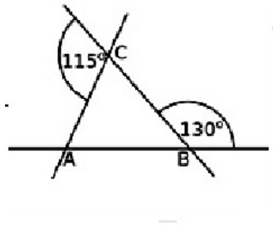
Odcinek AE jest dwusieczną kąta DAB. Udowodnij, że $|AC| = |CE|$.

Zadanie 11
Uzasadnij , że oba kąty przy podstawie AB trójkąta ABC są równe .



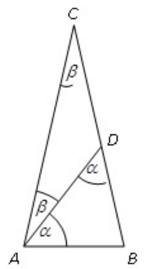
Rysunek 21:

Zadanie 12
Trzy proste przecinają się w sposób przedstawiony na rysunku , tworząc trójkąt ABC. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.



Rysunek 22:

Zadanie 13
Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w



Rysunek 23:

taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$ (zobacz rysunek poniżej). Udowodnij, że $|\measuredangle ADC| = 5 \cdot |\measuredangle ACD|$

Twierdzenie Talesa

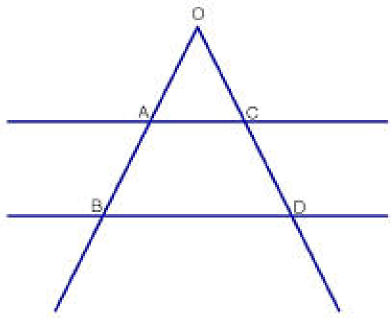
Tales z Miletu (ok. 627 - 546 p.n.e.). Tales urodził się w Milecie, stolicy starożytnej greckiej prowincji Jonia, nad morzem Egejskim. Jemu zawdzięczamy słynne powiedzenie: "Poznaj samego siebie!" Uważany jest za jednego z "siedmiu mędrców" starożytności, był pierwszym, który ogłosił ogólne wyniki dotyczące obiektów matematycznych. Interesował się przede wszystkim figurami geometrycznymi: kołami prostymi i trójkątami. Dowiódł, że każdemu trójkątowi można przypisać okrąg: taki, który przechodzi przez trzy wierzchołki trójkąta i zaproponował ogólną zasadę konstrukcji.

Rysunek 24: Tales z Miletu

Tales był założycielem jońskiej szkoły filozofów przyrody. Brał aktywny udział w życiu politycznym i gospodarczym swego miasta. Utrzymywał ożywione stosunki handlowe z Egiptem, Fenicją i Babilonią. To było powodem, iż do krajów tych odbywał częste podróże. I prawdopodobnie wtedy zapoznał się z osiągnięciami matematyki i astronomii Egiptu i Babilonii. Gdy Tales wpatrywał się w niebo, by odkryć sekrety obrotów gwiazd, wpadł do dziury. Młoda służąca, która mu towarzyszyła powiedziała: "Nie widzisz tego, co masz pod nogami, a myślisz, że potrafisz zrozumieć, co się dzieje na niebie!" Tales na owe czasy był wielkim astronomem, przewidział zaćmienie słońca na dzień 28 V 585 r. p.n.e. co przysporzyło mu sławy. Pomierzył również wysokość piramid za pomocą cienia, które one rzucały.

Jednym z twierdzeń geometrii elementarnej, sformułowanej przez Talesa, jest twierdzenie zwane jego imieniem: Jeśli ramiona kąta przeciąć dwiema równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków na drugim ramieniu kąta.

Talesa można uznać za tego, który łącząc teorię z praktykę zbudował fundamenty geometrii jako nauki dedukcyjnej, której ukoronowaniem były Elementy Euklidesa. Charakterystyczne są poglądy filozoficzne Talesa. Zrywały one z panującą we wcześniejszych koncepcjach, dotyczących powstania wszechświata, mitologiczną interpretacją zjawisk przyrody. Tales za prapierwiastek rzeczywistości uważał wodę, która miała otaczać ze wszystkich stron płaski krąg Ziemi.



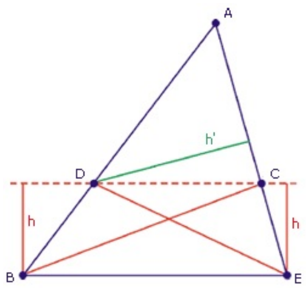
Rysunek 25:

Twierdzenie Talesa
Jeżeli ramiona kąta BOD przetniemy dwiema prostymi równoległymi $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, to zachodzi następująca równość:

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$$

Poniżej przedstawiony zostanie jeden z dowodów Twierdzenia Talesa. Jest to najstarszy zachowany dowód tego twierdzenia, pochodzący z VI. księgi "Elementów" Euklidesa.

Dowód

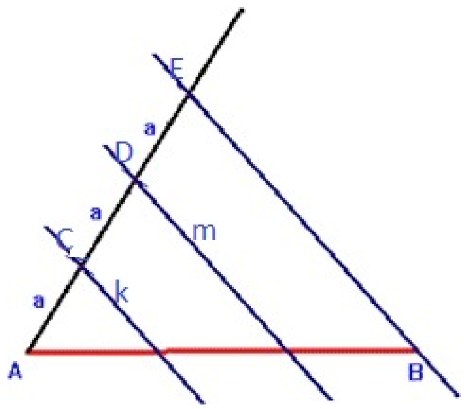


Rysunek 26:

Zauważmy, że trójkaty CED i EAD mają wspólną wysokość h', zatem

$\frac{P_{CED}}{P_{EAD}} = \frac{|CE|}{|EA|}$. Ponieważ trójkąty CED i BDC mają wspólną podstawę $|DC|$ oraz wspólną wysokość h, zatem $P_{CED} = P_{BDC}$.
Stąd $\frac{P_{CED}}{P_{EAD}} = \frac{P_{BDC}}{P_{EAD}}$
Trójkaty BDC i ABC mają wspólną wysokość, zatem $\frac{P_{BDC}}{P_{ABC}} = \frac{|BD|}{|AB|}$
Ponadto
$P_{ABC} = P_{BCD} + P_{CDA} = P_{CDE} + P_{CDA} = P_{ADE}$,
stąd
$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{P_{CED}}{P_{EAD}} = \frac{P_{BDC}}{P_{EAD}} = \frac{P_{BDC}}{P_{ABC}} = \frac{|BD|}{|AB|}$

Przykład
Dany odcinek $\overline{AB}$ podziel konstrukcyjnie na trzy równe części.



Rysunek 27:

Rowiązanie
Przez punkt A prowadzimy prostą l tak, aby utworzyła z odcinkiem $\overline{AB}$ kąt ostry. Na prostej l z punktu A odkadamy trzy odcinki dowolnej, równej długości a. Uzyskujemy w ten sposób punkty: C, D, E na prostej l. Łączymy prostą punkty E i B a następnie przez punkty C i D prowadzimy proste k i m równoległe do prostej AB. Punkty przecięcia prostych k i m z odcinkiem AB to szukane punkty podziału.
Uwaga!
W analogiczny sposób jak w Przykładzie powyżej możemy podzilić konstrukcyjnie dowolny odcinek na dowolną, naturalną liczbę części.

Wybrane równania wyższych stopni

Paragraf ten zaczniemy od pewnej dość oczywistej obserwacji:

Obserwacja 1
Jeśli iloczyn pewnej ilości liczb rzeczywisych jest równy zero, to któryś z czynników tego iloczynu musi być równy zero.

Pokażemy teraz na przykładzie jak zastosować tą obserwację do rozwiązywania niektórych równań algebraicznych. Powiedzmy, że chcemy rozwiązać następujące równanie

$$x^2 + 5x = 6$$

Pierwszą krok jaki zrobimy, to przeniesiemy wszystkie wyrazy danego równania na lewą stronę, otrzymamy w ten sposób rówanie

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

Drugim krokiem jaki wykonamy, to spróbujemy lewą stronę naszego równania zapisać w postaci iloczynu dwóch czynników w ten sposób aby każdy czynnik tego iloczynu zawierał niewiadomą "x" w pierwszej potędze. Mamy więc kolejno

$$x^2 + 5x - 6 = x^2 + x - 6x - 6 = x \cdot x + x \cdot 1 + (-6) \cdot x + (-6) \cdot 1 =$$

$$= x \cdot (x + 1) + (-6) \cdot (x + 1) = (x + 1) \cdot (x + (-6)) = (x + 1)(x - 6).$$

Nasze równanie możemy więc zapisać w postaci

$$(x + 1)(x - 6) = 0$$

Korzystając teraz z obserwacji 1 zauważamy, że jeśli liczba x spełnia powyższe równanie to musi być prawdziwa poniższa alternatywa

$$x + 1 = 0 \vee x - 6 = 0$$

skąd otrzymujemy, że rozwiązaniami naszego równania są liczby: -1 i 3.

Zwrócimy tera na uwagę na drugą równie oczywistą (jak obserwacja 1) rzecz aczkolwiek równie użyteczną, będzie nią następująca obserwacja:

Obserwacja 2
Jeżeli suma pewnej ilości liczb rzeczywistych nieujemnych jest równa zero, to

każdy składnik tej sumy musi być równy zero.

Zauważmy na wstępie, że z tej można by rzec trywialnej obserwacji wynika na przykład, że równanie
$$x^2 + 1 = 0$$
nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych. Jest tak dlatego, że równośc $1 = 0$ nie może zajśc.

Podobnie jak poprzednio pokażemy teraz na przykładzie jak zastosować obserwację 2 do rozwiązywania niektórych równań algebraicznych. Powiedzmy, że chcemy rozwiązać następujące równanie

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y - 2$$

Pierwszą krok jaki zrobimy, to przeniesiemy wszystkie wyrazy danego równania na lewą stronę, otrzymamy w ten sposób rówanie

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$$

Drugim krokiem jaki wykonamy, to spróbujemy lewą stronę naszego równania zapisać w postaci sumy kwadratów. Mamy więc kolejno

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

Nasze równanie możemy więc zapisać w postaci

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

Korzystając teraz z obserwacji 2 zauważamy, że jeśli para liczb (x, y) spełnia powyższe równanie to musi być prawdziwa poniższa alternatywa

$$x - 1 = 0 \vee y - 1 = 0$$

skąd otrzymujemy, że rozwiązaniami naszego równania para liczb $(1, 1)$.

Zadanie 1
Rozwiąż równania:

(a) $x^2 + 2 = 3x$

(b) $x^3 + 2 = 3x$

(c) $x^4 + 2 = 3x^2$

(d) $x^2 + q = -px$, gdzie $p, q \in R$ oraz $p^2 - 4q \geqslant 0$.

(e) $x^2 + y^2 - 2x = -1$

Zadanie 2

(a) Uzasadnij, że jeśli $p^2 - 4q < 0$. to równanie $x^2 + px + q = 0$, nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

(b) Jaki warunek muszą spełniać liczby $p, q, r \in R$ aby równanie

$$x^2 + y^2 - px - qy = r$$

miało dokładnie jedno rozwiązanie?

Niektóre równania i nierówności niewymierne

W paragrafie tym pokażemy na przykładach jak rozwiązywać niektóre równania i nierówności niewymierne. Zaczniemy od prostego przykładu.

Przykład 1
Rozwiąż równanie:

$$\sqrt{x+1} = 2$$

Rozwiązanie
Jeżeli

$$\sqrt{x+1} = 2,$$

to

$$(\sqrt{x+1})^2 = 2^2$$

a więc

$$x + 1 = 4$$

a zetem

$$x = 3.$$

Otrzymaliśmy więc następujący wniosek: *jeżeli jakakolwiek liczba rzeczywista x spełnia równanie $\sqrt{x+1} = 2$, to musi ona być równa* 3.
Pozostaje nam teraz jeszcze sprawdzić, czy liczba 3 jest rzeczywiście rozwiązaniem tego równania. Podstawiając $x = 3$ mamy

$$\sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$$

A zatem liczba 3 jest rozwiązaniem równania $\sqrt{x+1} = 3$.

Odpowiedź
Rozwiązaniem równania jest liczba 3.

Przykład 2
Rozwiąż równanie

$$\sqrt{x^2+x+1} = x+1$$

Rozwiązanie
Podobnie jak w zadaniu poprzednim, mamy kolejno:

$$\sqrt{x^2+x+1} = x+1$$

$$(\sqrt{x^2+x+1})^2 = (x+1)^2$$

$$x^2+x+1 = x^2+2x+1$$

$$x^2+x-x^2-2x = 1-1$$

$$-x = 0$$

$$x = 0$$

Otrzymaliśmy więc następujący wniosek: *jeżeli jakakolwiek liczba rzeczywista* x *spełnia równanie* $\sqrt{x^2+x+1} = x+1$, *to musi ona być równa* 0. Pozostaje nam teraz jeszcze sprawdzić, czy liczba 0 jest rzeczywiście rozwiązaniem tego równania. Podstawiając $x = 0$ mamy

$$\sqrt{0^2+0+1} = \sqrt{1} = 1 = 0+1.$$

A zatem liczba 0 jest rozwiązaniem równania $\sqrt{x^2+x+1} = x+1$.

Odpowiedź
Rozwiązaniem równania jest liczba 0.

Przykład 3
Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierównośc:

$$\sqrt{a+b+c} < \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Rozwiązanie
Mamy

$$\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}} > \frac{a}{\sqrt{a+b+c}}$$

i analogicznie

$$\sqrt{b} = \frac{b}{\sqrt{b}} > \frac{b}{\sqrt{a+b+c}}$$

oraz

$$\sqrt{c} = \frac{c}{\sqrt{c}} > \frac{c}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Dodając teraz stronami trzy powyższe nierówności otrzymamy:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} > \frac{a}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b+c}} =$$

$$= \frac{a+b+c}{\sqrt{a+b+c}} = \frac{(\sqrt{a+b+c})^2}{\sqrt{a+b+c}} = \sqrt{a+b+c}.$$

Zadania 1

Rozwiąż równania:

- $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1$
- $(x+1)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + 1 = 0$
- $\sqrt{x^2 - 3x + 1} = 2x + 1$

Zadania 2

Udowodnij nierówności:

- $|a||c| + |b||d| \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$ dla dowolnych $a, b, c, d \in R$.
- $|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$ dla dowolnych $x, y \in R$.
- $|u| - 3\sqrt{|u|} + 4 > 0$ dla $u \in R$.